ПРОГРАММА СПЕЦКУРСА "ГРУППЫ ЛИ". 1997 Г.

Лектор – Э.Б.Винберг

1. Группы Ли. Подгруппы Ли. Многообразие смежных классов и факторгруппа Ли.
2. Касательная алгебра Ли группы Ли. Касательная алгебра линейной группы Ли. Дифференциал гомоморфизма групп Ли. Присоединенное представление группы и алгебры Ли.
3. Связные компоненты группы Ли. Связность классических групп Ли $SL_n(K)$, $SO_n(K)$, $Sp_n(K)$, SU_n.
4. Восстановление гомоморфизма связной группы Ли по его дифференциалу. Соответствие между связными подгруппами Ли и подалгебрами касательной алгебры.
5. Односвязная накрывающая группы Ли. Односвязность классических групп Ли $SL_n(C)$, $Sp_n(C)$, SU_n. Накрывающие гомоморфизмы $SU_2 \to SO_3$ и $SU_2 \times SU_2 \to SO_4$.
6. Существование гомоморфизма односвязной группы Ли с заданным дифференциалом. Описание связных групп Ли с данной касательной алгеброй.
7. Экспоненциальное отображение в группах Ли, его свойства. Описание связных коммутативных вещественных групп Ли.
8. Действия групп Ли, их орбиты и стабилизаторы. Касательная алгебра стабилизатора. Орбиты компактных групп Ли.
9. Линейные представления групп и алгебр Ли. Инвариантные подпространства. Полная приводимость линейных представлений компактных групп Ли. Унитарный трюк Вейля.
10. Линейные представления групп $SL_2(C)$ и $SO_3(C)$.
11. Коммутант группы и алгебры Ли. Разрешимые группы и алгебры Ли. Теоремы Ли и Энгеля.
12. Полупростые алгебры Ли. Полупростота классических алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n(C)$, $\mathfrak{so}_n(C)$, $\mathfrak{sp}_n(C)$. Эквивалентность полупростоты вещественной алгебры Ли и ее комплексификации. Два типа простых вещественных алгебр Ли.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

13. Разложение Жордана комплексного линейного оператора, его свойства. Инвариантное скалярное умножение в полупростой алгебре Ли. Разложение полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых.
14. Оператор Казимира. Теорема Вейля. Дифференцирования полупростой алгебры Ли.
15. Разложение Жордана в полупростой комплексной алгебре Ли.
16. Картановская подалгебра и корневое разложение полупростой комплексной алгебры Ли. Свойства корневого разложения.
17. Абстракные системы корней. Группа Вейля, камера Вейля и система простых корней. Восстановление системы корней по системе простых корней. Матрица Картана и схема Дынкина.
18. Корневое разложение, группы Вейля и схемы Дынкина классических алгебр Ли.
19. Весовое разложение пространства линейного представления полупростой комплексной алгебры Ли, его свойства. Применение к присоединенному представлению.
20. Восстановление полупростой комплексной алгебры Ли по матрице Картана. Сопряженность картановских подалгебр.
21. Нормальная и компактная вещественные формы полупростой комплексной группы Ли.
22. Старший вектор и старший вес линейного представления полупростой комплексной алгебры Ли. Критерий неприводимости. Восстановление неприводимого линейного представления по его старшему весу.
23. Старшая компонента произведения неприводимых линейных представлений полупростой комплексной алгебры Ли, ее старший вес. Старший вес сопряженного представления. Неприводимость и старшие веса симметрических и внешних степеней тавтологического линейного представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(C)$.

Примечание. В случае, если курс сдается как полугодовой, в первых девяти вопросах требуется знать только определения и формулировки теорем.