Лекция 9 (7 апреля 2020) Билинейные и квадратичные функции. Приведение квадратичных форм к каноническому виду.

Определение 1. Пусть L – линейное пространство над полем K (достаточно считать, что поле скаляров – R – действительные числа). Функция двух векторных переменных $b(x,y):L\times L\to K$ называется *билинейной функцией*, если она линейна по каждому аргументу, то есть:

(1) $b(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y)=\alpha_1 b(x_1,y)+\alpha_2 b(x_2,y)$,

(2) $b(x,\beta_1 y_1+\beta_2 y_2)=\beta_1 b(x,y_1)+\beta_2 b(x,y_2)$ для любых векторов $x,x_1,x_2,y,y_1,y_2\in L$ и любых скаляров $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in K$.

Скалярное произведение геометрических векторов – самый наглядный пример билинейной функции.

Прежде чем перейти к рассмотрению билинейных функций в координатах, приведем примеры функций, заданных без координат.

Пример 1. Пусть $L=R[a,b]$ - линейное пространство функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$, для любых функций $f(x),g(x)\in L$ интеграл от произведения $I(f,g)=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ является билинейной функцией на L.

Пример 2. На пространстве $L=M_n(R)$ действительных матриц порядка n рассмотрим две функции для любых матриц $X,Y\in M_n(R)$ а) $b_1(X,Y)=tr(XY)$ - след произведения;

б) $b_2(X,Y)=tr(X^T\cdot Y)$. Билинейность этих функций следует из линейности функции следа $trX=x_{11}+...+x_{nn}$ и свойств действий над матрицами.

Пусть L имеет размерность n, $e=\|e_1,e_2,....,e_n\|$- базис в L. Обозначим $b_{ij}=b(e_i,e_j)\,(1\le i,j\le n)$.

Определение 2. Матрицу $B=(b_{ij})=B_e$ называют *матрицей билинейной функции* $b(x,y)$ в базисе $e=\|e_1,e_2,....,e_n\|$.

Координатная запись билинейной функции.

Пусть $x=\sum\limits_{i=1}^n x_i e_i,\ y=\sum\limits_{j=1}^n y_j e_j$, тогда

$$b(x,y)=b(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_jb(e_i,e_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_ib_{ij}y_j=X^TBY \quad (3),$$

где $B=(b_{ij})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, а $X^T=(x_1\ldots x_n)$.

Определение 3. Запись билинейной функции в виде многочлена (3) называют билинейной формой. (Очень часто термин «билинейная форма» используется и для билинейной функции, не записанной в координатах.)

Утверждение 1. (Изменение матрицы билинейной функции при замене базиса). Пусть $e=(e_1,\ldots,e_n)$ и $e'=(e_1',\ldots,e_n')$ - два базиса пространства L, S – матрица перехода от базиса e к базису e', B, B' – матрицы билинейной формы **b** в базисах e,e' соответственно.

Тогда $B'=S^TBS$. (4)

Доказательство. Мы знаем, что $X=SX'$, $Y=SY'$ $(\det S\neq 0)$, где X', Y' - столбцы координат векторов x,y в новом базисе. Подставим эти выражения в (3):
$X^TBY=(SX')^TB(SY')=(X')^T(S^TBS)Y'$, для любых $X',Y'\in R^n$, следовательно, $B'=S^TBS$ (чтобы доказать совпадение матриц, нужно подставлять в равенство $(X')^T(S^TBS)Y'=(X')^TB'Y'$ координаты всех пар e_i',e'_j : $E_i^TBE_j=b_{ij}$), чтд.

Следствие из формулы (4): 1) ранг матрицы B и 2) знак ее определителя (если он не равен 0, над полем R) не зависят от выбора базиса.

Определение 4. Билинейная форма $b(x,y)$ называется *симметрической*, если $\forall x,y\in L,\ \ b(x,y)=b(y,x)$, и кососимметрической, если $\forall x,y\in L,\ \ b(x,y)=-b(y,x)$.

Утверждение 2. Матрица *симметрической* билинейной формы в любом базисе является симметрической, т.е. $B^T=B$, а кососимметрической билинейной формы – кососимметрической: $B^T=-B$. Это очевидно.

Утверждение 3. Любая билинейная функция $b(x,y)$ над полем характеристики, не равной 2, единственным образом представляется в виде суммы симметрической и кососимметрической функций.

Доказательство. Будем искать разложение $b(x,y)=b_+(x,y)+b_-(x,y)$ (1), где $b_+(x,y)=b_+(y,x),\ b_-(x,y)=-b_-(y,x)$. Тогда $b(y,x)=b_+(x,y)-b_-(x,y)$ (2). Сложив равенства (1) и (2), получим $b_+(x,y)=\dfrac{b(x,y)+b(y,x)}{2}$, $b_-(x,y)=\dfrac{b(x,y)-b(y,x)}{2}$.

Замечание. Этому разложению соответствует разложение любой квадратной матрицы в сумму симметрической и кососимметрической: $B=\dfrac{B+B^T}{2}+\dfrac{B-B^T}{2}$.

Определение 5. Квадратичной функцией (формой), порожденной билинейной формой $b(x, y)$, называется функция $k(x) = b(x, x), \ \forall x \in L$, если $\exists x \in L : k(x) \neq 0$.

Отметим, что существует бесконечно много билинейных функций, порождающих одну и ту же квадратичную функцию, поскольку из
$b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y) \Rightarrow b_-(x, x) \equiv 0, \ b(x, x) = b_+(x, x)$.

Утверждение 4. Для любой квадратичной функции $k(x)$ существует единственная симметрическая билинейная форма $b(x, y)$ такая, что $k(x) = b(x, x), \ \forall x \in L$.

Доказательство. Имеем

$$k(x) = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(y, y) + 2b(x, y) = k(x) + k(y) + 2b(x, y) \Rightarrow$$

$$b(x, y) = \frac{k(x + y) - k(x) - k(y)}{2}$$, чтд.

Построенная симметрическая билинейная функция упоминается как поляризация данной квадратичной функции $\boldsymbol{k}$.

Матрицей квадратичной формы называют матрицу породившей ее симметрической билинейной формы. Рассмотрим к*оординатную запись квадратичной формы*. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, тогда

$$b(x, x) = b(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j b(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i b_{ij} x_j = X^T B X \quad (5),$$ где

$B = (b_{ij})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, а $X^T = (x_1 \dots x_n)$.

С учетом симметричности коэффициентов квадратичной формы, ее можно записать в виде

$$k(x) = b_{11} x_1^2 + \dots + b_{nn} x_n^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} b_{ij} x_i x_j .$$

Далее будем рассматривать вещественные квадратичные формы (до этого только нужно было, чтобы характеристика поля K не равнялась 2, чтобы можно было делить на 2).

Определение 6. Квадратичная форма вида $k(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$ называется *диагональной*.

Она называется *канонической*, если $\alpha_i \in \{1, -1, 0\}$. Более детально,

$k(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2$. Числа p и q называются *положительным* и *отрицательным* индексами инерции квадратичной формы.

Лемма. Общее число ненулевых коэффициентов диагональной (или канонической) квадратичной формы равно рангу её матрицы. (Поле любое характеристики не 2).

В самом деле, матрица диагональной квадратичной формы $k(x)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i^2\ (r\le n)$ равна

$$B=\begin{Vmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \alpha_r & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{Vmatrix}\ (\alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_r\ne 0)\Rightarrow rgB=r\,.$$

Теорема 1. (О приведении квадратичной формы к диагональному и каноническому виду) Для любой квадратичной формы $k(x)=b_{11}x_1^2+\ldots+b_{nn}x_n^2+2\sum_{1\le i<j\le n} b_{ij}x_i x_j$ существует такая невырожденная замена переменных $X=SY\ (\det S\ne 0)$, что в новых переменных она принимает диагональный вид, над R - канонический вид $k=\sum_{i=1}^{p} y_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2$.

Теорема 2 (о единственности – **закон инерции**). Если $X=TZ\ (\det T\ne 0)$ - другая замена переменных, приводящая вещественную квадратичную форму $k(x)$ к каноническому виду $k=\sum_{i=1}^{s} z_j^2-\sum_{i=s+1}^{s+t} z_j^2$, то $p=s, q=t$, причем $p+q=rgB$.

Заметим, что равенство $p+q=rgB$ следует из сохранения ранга матрицы B при замене базиса.

Доказательство теоремы 1 – ***алгоритм Лагранжа выделения полных квадратов.***

1) Допустим, что $\exists i:\ b_{ii}\ne 0$, при необходимости перенумеровав переменные, можем считать, что $b_{11}\ne 0$. Тогда выделим в квадратичной форме все одночлены, содержащие x_1, и дополним это выражение до квадрата:

$$k(x)=b_{11}x_1^2+2\sum_{j=2}^{n} b_{1j}x_1x_j+(\sum_{i=2}^{n} b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j\le n} b_{ij}x_ix_j)\ =$$

$$=b_{11}(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2+(\sum_{i=2}^{n} b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j\le n} b_{ij}x_ix_j-(\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2)=b_{11}(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2+k_1(x_2,\ldots,x_n)$$

Тогда сделаем замену $z_1=(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j),\ z_2=x_2,\ldots,\ z_n=x_n$.

Квадратичная форма $k_1(x_2,\ldots,x_n)$ не зависит от x_1, и к ней можно применить тот же метод, в результате получится квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i z_i^2\quad (\alpha_1=b_{11},\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r\ne 0, r=rgB)\,.$$

Для вещественной квадратичной формы нужно сделать замену

$$y_i=\sqrt{|\alpha_i|}z_i, i=1,\ldots,r;\quad y_k=z_k, k=r+1,\ldots,n\,.$$

2) Особый случай. Препятствие к выделению квадратов может возникнуть, если $a_{ii}=0,\ \forall i=1,...,n$. Так как

$k(x)\neq 0,\ \text{то}\ \exists i,j: b_{ij}\neq 0$. Перенумеровав при необходимости переменные, можем добиться, того, чтобы $b_{12}\neq 0$. Тогда сделаем подготовительную замену

$x_1=x'_1-x'_2,\ x_2=x'_1+x'_2,\ x_j=x'_j\,(j\geq 3)$. и $k(x')=2b_{12}(x'^2_1-x'^2_2)+k'(x'),$ где в $k'(x')$ нет x'^2_1. Далее можно продолжать, как в п. 1). (Вместо этого можно сделать замену $x_1=x'_1$, $x_2=x'_1+x'_2$).

(Замечание. Вместо параметров p и q, введенных выше, нередко рассматривают величины r=p+q – ранг B и $\sigma=p-q$ - сигнатуру.)

Примечание. Вместо дополнения до квадратов, можно упрощать матрицу квадратичной формы, имитируя алгоритм Гаусса, только обязательно делать согласованные преобразования столбцов и строк, в соответствии с формулой $B'=S^TBS$.

Доказательство теоремы 2. Пусть в базисе $e_1,...,e_p;e_{p+1},...,e_{p+q},...,e_n$ квадратичная форма имеет вид $k=\sum_{i=1}^{p}y_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q}y_i^2$, а в базисе $f_1,...,f_s;f_{s+1},...,f_{s+t},...,f_n$ она имеет вид $k=\sum_{i=1}^{s}z_j^2-\sum_{i=s+1}^{s+t}z_j^2$. Во-первых, $p+q=s+t=rgB$, так как ранг матрицы квадратичной формы не изменяется при замене базиса.

Предположим, что утверждение теоремы неверно и, скажем, t>q, тогда s < p. Рассмотрим подпространства

$L_1=\langle e_1,...,e_p\rangle, L_2=\langle f_{s+1},...,f_n\rangle$: ясно, что $k\big|_{L_1}>0, k\big|_{L_2}\leq 0$ (последние записи обозначают ограничения функции k на L_1, L_2 соответственно). При этом

$n\geq\dim(L_1+L_2)=\dim(L_1)+\dim(L_2)-\dim(L_1\cap L_2)$ и

$\dim(L_1)+\dim(L_2)=p+(n-s)=n+(p-s)>n$, следовательно,

$$n\geq\dim(L_1+L_2)=\dim(L_1)+\dim(L_2)-\dim(L_1\cap L_2)>n-\dim(L_1\cap L_2)\Rightarrow L_1\cap L_2\neq 0\Rightarrow$$

$$\exists a\in L_1\cap L_2, a\neq 0,\ k(a)>0\ , k(a)\leq 0$$

противоречие.

Теперь предположим, что s > p, тогда, как и выше, $\langle e_{p+1},...,e_n\rangle\cap\langle f_1,...,f_s\rangle\neq 0$ - снова противоречие. Таким образом, s = p и, значит, t = q, чтд.