Лекция 10

Лемма 1. *а) A_n порождается тройными циклами.*

б) При $n \geq 5$ группа A_n порождается парами несмежных транспозиций $(i,j)(k,s)$.

Доказательство. а) Пусть $\sigma \in A_n$. Любая перестановка разлагается в произведение транспозиций. Поскольку σ – четная перестановка, $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_{2m}$. Рассмотрим $\tau_{2l-1}\tau_{2l}$. Возможны 3 варианта:

1) $\tau_{2l-1} = \tau_{2l}$. Тогда из произведения можно их удалить.

2) $\tau_{2l-1} = (i,j)$, $\tau_{2l} = (j,k)$. Тогда $\tau_{2l-1}\tau_{2l} = (i,j,k)$.

3) $\tau_{2l-1} = (i,j)$, $\tau_{2l} = (k,s)$. Тогда $\tau_{2l-1}\tau_{2l} = (i,j)(j,k)(j,k)(k,s) = (i,j,k)(j,k,s)$.

б) Пусть H – подгруппа A_n, $n \geq 5$ порожденная всеми парами несмежных транспозиций.

$$(i,j)(k,s) \cdot (k,s)(j,r) = (i,j)(j,r) = (i,j,r).$$

Значит, H содержит все тройные циклы. Но, как уже доказано, тройные циклы порождают A_n. Следовательно, $H = A_n$.

□

Теорема 1. *$S_n' = A_n$.*

Доказательство. Как известно, $A_n \triangleleft S_n$ и $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ – абелева группа. Следовательно, $S_n' \subset A_n$.

Обратное включение будет следовать из явных выкладок.

$$[(i,j),(j,k)] = (i,j)(j,k)(i,j)(j,k) = (i,k,j).$$

Значит, любой тройной цикл (i,k,j) лежит в S_n'. Далее утверждение теоремы следует из леммы 1 а). □

Теорема 2. *1) $A_3' = \{id\}$,*

2) $A_4' = V_4$,

3) $A_n' = A_n$ при $n \geq 5$.

Доказательство. 1) Группа A_3 изоморфна $\mathbb{Z}_3$ и является абелевой.

2) $|A_4| = 12$, $|V_4| = 4$, следовательно, $|A_4/V_4| = 3$, то есть $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$ – абелева группа. Значит, $A_4' \subset V_4$. С другой стороны

$$[(i,j,k),(j,k,s)] = (i,j,k)(j,k,s)(i,k,j)(j,s,k) = (i,s)(j,k).$$

Следовательно, $V_4 \subset A_4'$. Итак, $A_4' = V_4$.

3) Как следует из предыдущего пункта при $n \geq 4$ выполнено $(i,s)(j,k) \in A_n'$ $\forall i,j,k,s$.

Далее утверждение теоремы вытекает из леммы 1 б). □

Лемма 2. *Пусть H – нормальная подгруппа группы G. Допустим, что в группе G/H есть нормальная подгруппа $\{e\} \subsetneq K \subsetneq G/H$. Тогда $L = \pi_H^{-1}(K)$ – нормальная подгруппа в группе G, причем $H \subsetneq L \subsetneq G$.*

Доказательство. Проверим то, что прообраз группы при гомоморфизме является группой. Пусть $l_1, l_2 \in L$. Тогда $\pi_H(l_2 l_2) = \pi_H(l_1)\pi_H(l_2) \in K$. Следовательно, $l_1 l_2 \in L$. Также $\pi_H(l_1^{-1}) = \pi_H(l_1)^{-1} \in K$, значит, $l_1^{-1} \in L$. Кроме того $e \in L$. Значит, L – подгруппа.

Пусть $g \in G$, $l \in L$. Тогда $\pi_H(glg)^{-1} = \pi_H(g)\pi_H(l)\pi_H(g)^{-1} \in K$. Значит, $glg^{-1} \in L$. То есть L нормальна в G.

Так как π_H – сюръекция и $K \neq \{e\}$, получаем $L = \pi_H^{-1}(K) \supsetneq \pi_H^{-1}(e) = H$. Аналогично так как $K \neq G/H$, получаем $L = \pi_H^{-1}(K) \subsetneq \pi_H^{-1}(G/H) = G$. □

Определение 1. Группа G называется *простой*, если у нее нет нормальных подгрупп, отличных от $\{e\}$ и самой G.

Определение 2. Назовем *субнормальным* рядом группы G ряд подгрупп

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright G_3 \triangleright \ldots \triangleright G_n = \{e\},$$

каждая следующая из которых нормальна в предыдущей. Этот ряд называется *композиционным рядом группы* G, если все факторгруппы G_i/G_{i+1} простые.

Например, для разрешимой группы ряд из кратных коммутантов – это субнормальный ряд.

Предложение 1. *Для конечной группы любой субнормальный ряд может быть уплотнен до композиционного. (То есть можно добавить промежуточные группы так, чтобы ряд стал композиционным.)*

Доказательство. Если факторгруппа G_i/G_{i+1} не простая, то по лемме 2 можно уплотнить субнормальный ряд, то есть добавить в него еще одну подгруппу. Так как группа G конечна, уплотнение не может происходить бесконечно. $\square$

Предложение 2. *Абелева группа проста тогда и только тогда, когда она изоморфна $\mathbb{Z}_p$ для простого p.*

Доказательство. В абелевой группе все подгруппы являются нормальными. Поэтому абелева группа проста тогда и только тогда, когда в ней нет других подгрупп, кроме $\{e\}$ и G. Для каждого $g \in G$ можно рассмотреть циклическую подгруппу $\langle g \rangle \subset G$. Если $g \neq e$, то $\langle g \rangle \neq \{e\}$. Значит, $\langle g \rangle = G$, то есть G – циклическая. Если $G \cong \mathbb{Z}$, то в ней есть нетривиальные подгруппы $k\mathbb{Z}$. Если же $G \cong \mathbb{Z}_{ab}$, где $a \neq 1$ и $b \neq 1$, то в G есть нетривиальная подгруппа $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_b$. $\square$

Теорема 3. *Пусть G – конечная группа. Следующие условия эквивалентны.*

1) Группа G разрешима.

2) G включается в ряд подгрупп

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright G_3 \triangleright \ldots \triangleright G_n = \{e\},$$

где G_i/G_{i+1} абелевы.

3) G включается в ряд подгрупп

$$G = \widetilde{G}_0 \triangleright \widetilde{G}_1 \triangleright \widetilde{G}_2 \triangleright \widetilde{G}_3 \triangleright \ldots \triangleright \widetilde{G}_m = \{e\},$$

где $\widetilde{G}_i/\widetilde{G}_{i+1}$ – циклические простого порядка (то есть $\mathbb{Z}_p$ для некоторого простого p).

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Если G разрешима, можно взять $G_i = G^{(i)}$. Тогда $G_i/G_{i+1} = G^{(i)}/G^{(i+1)}$ – абелева группа.

$2 \Rightarrow 3$. По лемме 2 ряд $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright G_3 \triangleright \ldots \triangleright G_n = \{e\}$ можно уплотнить до композиционного

$$G = \widetilde{G}_0 \triangleright \widetilde{G}_1 \triangleright \widetilde{G}_2 \triangleright \widetilde{G}_3 \triangleright \ldots \triangleright \widetilde{G}_m = \{e\}.$$

Так как факторгруппы G_i/G_{i+1} абелевы, $G_i' \subseteq G_{i+1}$. Отсюда следует, что $\widetilde{G}_j' \subseteq G_{j+1}$. Тогда факторгруппы $\widetilde{G}_j/G_{j+1}$ абелевы. По предложению 2, они изоморфны $\mathbb{Z}_p$.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть G включается в такой ряд подгрупп. Тогда $G/\widetilde{G}_1$ абелева, а значит, $G' \subseteq \widetilde{G}_1$. Аналогично $G^(2) \subseteq \widetilde{G}_2 \ldots G^(m) \subseteq \widetilde{G}_m = \{e\}$. Значит, G разрешима. $\square$

Теорема 4 (Жордан-Гельдер). *Факторы G_i/G_{i+1} композиционного ряда определены однозначно с точностью до перестановки.*

Теорема Жордана-Гельдера связывает с любой группой некоторый набор простых групп (факторов композиционного ряда). Это дает мотивацию изучать простые группы. Например, очень популярной темой является классификация конечных простых групп. Конечные простые группы содержат несколько серий (одна из котрорых – это группы $A_n, n \in \mathbb{N}$). Также есть (довольно большие) единичные примеры групп, они называются *спорадическими группами.* Различные математики не сходятся во мнении, можно ли считать классификацию конечных простых групп завершенной. Дело в том, что она содержится в большом количестве работ и все эти работы не может прочитать за свою жизнь один человек.

Стоит упомянуть, что изучение простых факторов композиционного ряда не дает полной классификации групп, так как могут быть различные группы с одинаковым набором факторов.

Теорема 5. *Группа A_n проста при $n \geq 5$.*

Сперва докажем следующие две леммы.

Лемма 3. *При $n \geq 5$ все циклы длины 3 сопряжены в A_n.*

Доказательство. Докажем, что любой тройной цикл (a, b, c) сопряжен циклу $(1, 2, 3)$. В S_n эти циклы сопряжены перестановкой

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ a & b & c & u & v & \dots \end{pmatrix},$$

то есть $\sigma(1, 2, 3)\sigma^{-1} = (a, b, c)$. Если σ – четная перестановка, то $(1, 2, 3)$ и (a, b, c) сопряжены в A_n. Если же σ – нечетная перестановка, то рассмотрим

$$\widehat{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ a & b & c & v & u & \dots \end{pmatrix} \in A_n.$$

Тогда $\widehat{\sigma}(1, 2, 3)\widehat{\sigma}^{-1} = (a, b, c)$ □

Лемма 4. *В A_n все пары несмежных транспозиций сопряжены.*

Доказательство. Пусть $\sigma = (a, b)(c, d)$ – пара несмежных транспозиций. Докажем, что σ сопряжена $(1, 2)(3, 4)$. Возьмем

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ a & b & c & d & \dots \end{pmatrix} \in S_n.$$

Тогда $\xi(1, 2)(3, 4)\xi^{-1} = \sigma$. Если $\xi \in A_n$, то $(1, 2)(3, 4)$ и σ сопряжены в A_n. Если же ξ – нечетная перестановка, то рассмотрим

$$\widehat{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ b & a & c & d & \dots \end{pmatrix} \in A_n.$$

Имеем $\widehat{\xi}(1, 2)(3, 4)\widehat{\xi}^{-1} = \sigma$, то есть $(1, 2)(3, 4)$ и σ сопряжены в A_n. □

Доказательство теоремы 5. Пусть H – нормальная подгруппа в A_n.

Случай 1. В H есть тройной цикл (abc). Поскольку H нормальна в A_n, а все тройные циклы в A_n сопряжены (по лемме 3), то все тройные циклы лежат в H. Поскольку A_n порождается тройными циклами (см. лемму 1), $H = A_n$.

Случай 2. В H есть перестановка δ, в разложении которой есть цикл длины не менее 5.

$$\delta = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_m)(\ldots)\ldots(\ldots)$$

Сопряжем δ с помощью перестановки $\xi = (x_1 x_3)(x_2 x_4)$. Получаем

$$\xi\delta\xi^{-1} = (x_1x_3)(x_2x_4)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_m)(\ldots)\ldots(\ldots)(x_1x_3)(x_2x_4) =$$
$$= (x_3x_4x_1x_2x_5\ldots, x_m)(\ldots)\ldots(\ldots) \in H.$$

Тогда

$$[(x_3, x_4, x_1, x_2, x_5, \ldots, x_m)(\ldots)\ldots(\ldots)]^{-1} \circ [(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_m)(\ldots)\ldots(\ldots)] =$$
$$= (x_2x_mx_4) \in H$$

Попадаем в случай 1.

Случай 3. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть хотя бы два цикла длины 3.

$$\sigma = (a, b, c)(d, e, f)\ldots.$$

Тогда

$$(a, b, c, d, e)\sigma(a, b, c, d, e)^{-1} = (b, c, d)(e, a, f)\ldots = \delta.$$

Имеем $\delta^{-1}\sigma = (a, d, f, c, e)$. Попадаем в случай 2.

Случай 4. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть хотя бы три цикла длины 2. Сопряжем $\sigma = (a, b)(c, d)(e, f)\ldots$ с помощью (a, b, c, d, e), получим

$$\delta = (bc)(de)(af)\ldots.$$

Перемножив $\delta^{-1}\sigma$, получаем $(a, c, e)(b, f, d)$ и попадем в случай 3.

Случай 5. В H есть перестановка, разлагающаяся в 2 цикла длины 2. По лемме 4 там есть все пары несмежных транспозиций. А они порождают A_n.

Случай 6. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть циклы длины 2 и 3 при этом есть хотя бы 1 цикл длины 3. Если мы не в условиях случая 3, то в σ есть лишь 1 цикл длины 3. Возведем σ в квадрат, попадем в случай 1.

Случай 7. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть циклы длины 2, 3 и 4 при этом есть хотя бы 1 цикл длины 4. Возведем σ в квадрат, попадем в один из случев 6, 4 или 5.

$\square$