Лекция 15

Заметим, что одномерные матричные представления изоморфны тогда и только тогда, когда они совпадают. В самом деле, так как группа $\mathrm{GL}_1(F) \cong F^\times$ коммутативна, сопряжение в ней не изменяет представление.

Теорема 1. *Существует n различных (неизоморфных) комплексных одномерных представлений группы $\mathbb{Z}_n$*

Доказательство. Пусть $\rho\colon \mathbb{Z}_n \to F^\times$ – одномерное представление. Тогда

$$\rho(1)^n = \rho(n) = \rho(0) = 1.$$

То есть $\varepsilon = \rho(1)$ – корень n-ой степени из 1. При этом $\rho(k) = \varepsilon^k$, то есть образом единицы задается ρ. Наоборот, если взять в качестве ε любой корень из 1 n-ой степени, то получим одномерное представление по формуле $\rho(k) = \varepsilon^k$.

Получаем, что одномерных представлений группы $\mathbb{Z}_n$ столько же, сколько корней из 1 степени n. То есть в случае $F = \mathbb{C}$ их n. И все они имеют вид $\rho(k) = \varepsilon^k$ для некоторого корня из 1 n-ой степени ε. □

Следствие 1. *Пусть G – абелева группа порядка n. Существует n различных (неизоморфных) комплексных одномерных представлений группы G.*

Доказательство. Группа G изоморфна прямой сумме циклических групп

$$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}.$$

Аналогично теореме элемент $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$, где 1 стоит на i-м месте может переходить в любой корень n_i степени из 1. Если же $\rho((0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)) = \varepsilon_i$, то $\rho((a_1, \ldots, a_k)) = \varepsilon_1^{a_1} \ldots \varepsilon_k^{a_k}$. Число способов выбрать $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ равно n. □

Предложение 1. *Пусть A – абелева группа и G – произвольная группа. И пусть $\varphi\colon G \to A$ – гомоморфизм. Тогда*

1) $G' \subset \operatorname{Ker}\varphi$,

2) $\varphi = \psi \circ \pi_{G'}$ для некоторого гомоморфизма $\psi\colon G/G' \to A$,

3) соответствие $\varphi \leftrightarrow \psi$ является биекцией между множествами гомоморфизмов $G \to A$ и $G/G' \to A$.

Доказательство. 1) $\varphi([g,h]) = [\varphi(g), \varphi(h)] = e$. Значит, $G' \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.

2) Определим $\psi\colon G/G' \to A$ по формуле $\psi(gG') = \varphi(g)$. Проверим корректность. Пусть $g_1G' = g_2G'$. Тогда $g_2 = g_1h$, где $h \in G'$. Имеем,

$$\varphi(g_2) = \varphi(g_1h) = \varphi(g_1)\varphi(h) = \varphi(g_1).$$

Проверим, что ψ – гомоморфизм. Действительно,

$$\psi((g_1G')(g_2G')) = \psi(g_1g_2G') = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(g_1G')\psi(g_2G').$$

Коме того

$$\psi \circ \pi_{G'}(g) = \psi(gG') = \varphi(g),$$

то есть $\psi \circ \pi_{G'} = \varphi$.

3) По гомоморфизму ψ мы можем однозначно построить гомоморфизм $\varphi = \psi \circ \pi_{G'}$, а по гомоморфизму φ однозначно восстанавливается ψ. Значит, это биекция. □

Следствие 2. *Любое одномерное представление $\rho\colon G \to F^\times$ группы G имеет вид $\zeta \circ \pi_{G'}$, где $\zeta\colon G/G' \to F^\times$ – одномерное представление группы G/G'. И это задает биекцию между одномерными представлениями G и одномерными представлениями G/G'.*

Доказательство. Утверждение следствия получается применением предложения 1 к случаю $A = F^{\times}$. $\square$

Из предыдущего следствия и следствия 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *У группы G ровно $|G/G'|$ одномерных комплексных представлений.*

Замечание 1. Если отказаться от алгебраической замкнутости поля, то утверждение предыдущего предложения будет неверным. Действительно $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x. \end{pmatrix}$ является неприводимым 2-мерным представлением $(\mathbb{R}, +)$ над $\mathbb{R}$

Определение 1. Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ – линейное представление. Подпространство $U \subset V$ называется *инвариантным*, если для любого $g \in G$ выполнено $\rho(g)(U) \subset U$.

Если U – инвариантное подпространство и мы выберем базис $e_1, \ldots, e_k$ в U, а затем дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_n$ в V, то матрицы $\rho(g)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ будут иметь блочно-верхнетреугольный вид

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Определение 2. Представление $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ называется *неприводимым* если не существует инвариантных подпространств $U \subset V$ кроме $\{0\}$ и V.

Предложение 2. *Если F – алгебраически замкнутое поле, то любое неприводимое представление ρ абелевой группы G одномерно.*

Доказательство. Операторы $\rho(g)$ коммутируют между собой. Пусть $V_\lambda \neq \{0\}$ – собственное подпространство одного оператора $\rho(g_0)$. Тогда V_λ инвариантно относительно всех операторов $\rho(g)$. Действительно, при $v \in V_\lambda$ имеем

$$\rho(g_0)(\rho(g)(v)) = \rho(g_0) \circ \rho(g)(v) = \rho(g) \circ \rho(g_0)(v) = \rho(g)(\lambda v) = \lambda\rho(g)(v).$$

То есть $\rho(g)(v)$ – собственный вектор $\rho(g_0)$ с собственным значением λ.

Докажем по индукции по размерности n, что у представления абелевой группы над алгебраически замкнутым полем F есть одномерное инвариантное подпространство. База $n = 1$ очевидна. Шаг индукции. Если все операторы $\rho(g)$ скалярны, возьмем любое одномерное подпространство. Если есть $\rho(g_0)$ не скалярный. Пусть λ – его собственное значение. Тогда V_λ инвариантно относительно всех операторов $\rho(g)$, а значит, у представления $\rho\,|_{V_\lambda}$ есть одномерное инвариантное подпространство. Оно же будет одномерным инвариантным подпространством для ρ. $\square$

Замечание 2. Если отказаться от алгебраической замкнутости поля, то утверждение предыдущего предложения будет неверным. Действительно $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x. \end{pmatrix}$ является неприводимым 2-мерным представлением $(\mathbb{R}, +)$ над $\mathbb{R}$

Определение 3. Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ – два представления одной и той же группы G. *Прямой суммой* представлений ρ и ζ называется представление $\rho \oplus \zeta\colon G \to \mathrm{GL}(V \oplus W)$, определенное по правилу:

$$\rho \oplus \zeta(g)(v + w) = \rho(g)(v) + \zeta(g)(w).$$

Если выбрать базис в $V \oplus W$, являющийся объединением базисов V и W, то матрица оператора $\rho \oplus \zeta(g)$ имеет в этом базисе блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \zeta(g) \end{pmatrix}.$$

Пример 1. *Следующее отображение дает двумерное представление группы $\mathbb{Z}_2$:*

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Оно является прямой суммой двух одномерных.

Определение 4. Представление называется *вполне приводимым*, если оно изоморфно прямой сумме неприводимых.

Замечание 3. В частности любое неприводимое представление вполне приводимо.

Пусть U – инвариантное пространство представления $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Назовем U' *дополнительным* инвариантным пространством, если U' инвариантно и $V = U \oplus U'$.

Предложение 3. *Пусть ρ – конечномерное представление. Если для любого инвариантного подпространства найдется дополнительное инвариантное подпространство, то представление вполне приводимо.*

Доказательство. Докажем по индукции по размерности представления n. База при $n = 1$ очевидна.

Шаг индукции. Если ρ неприводимо, то оно вполне приводимо. Пусть это не так. Тогда есть инвариантное подпространство $U \subset V$. Тогда $V = U \oplus U'$, где U' – дополнительное инвариантное подпространство. И значит, $\rho = \rho\,|_U \oplus \rho\,|_{U'}$. По предположению индукции представления $\rho\,|_U$ и $\rho\,|_{U'}$ вполне приводимы. Тогда ρ также вполне приводимо. □

Пример 2 (Пример не вполне приводимого представления)**.** *Рассмотрим следующее представление группы $\mathbb{Z}$ (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$):*

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно, что $\langle e_1 \rangle$ – инвариантное подпространство. Но если бы это представление было вполне приводимым, оно бы раскладывалось в сумму двух одномерных. Тогда в подходящем базисе все матрицы были бы диагональны. Однако матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не диагонализуема.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится некоторая подготовка из курса линейной алгебры.

Определение 5. Пусть $V = U \oplus W$ – разложение векторного пространства в прямую сумму. Оператор $P\colon V \to V$ называется *проектором на W вдоль U*, если $P(u+w) = w$.

Легко видеть, что если P – проектор на W вдоль U, то $\operatorname{Ker} P = U$, $\operatorname{Im} P = W$. И кроме того $P^2 = P$, так как $P^2(u + w) = P(w) = P(0 + w) = w$.

Лемма 1. *Если для некоторого оператора $P\colon V \to V$ выполнено $P^2 = P$, то $V = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$ и P есть проектор на $\operatorname{Im} P$ вдоль $\operatorname{Ker} P$.*

Доказательство. Для краткости обозначим $U = \operatorname{Ker} P$, $W = \operatorname{Im} P$. Пусть $v \in V$. Тогда $P(v) \in W$. Представим $v = P(v) + (v - P(v))$. Имеем

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - p(v) = 0.$$

Значит, $v - P(v) \in U$. Таким образом, любой вектор $v \in V$ может быть представлен как сумма вектора $v - P(v) \in U$ и $P(v) \in W$. То есть $V = U + W$. Так как $\dim\, U + \dim\, W = \dim\, \operatorname{Ker} P + \dim\, \operatorname{Im} P = \dim\, V$, получаем $V = U \oplus W$.

Любой вектор из V может быть представлен как сумма $u + w$, где $u \in U$ и $w \in W$. Тогда $w = P(v)$ для некоторого вектора $v \in V$. При этом

$$P(u + w) = P(u) + P(w) = 0 + P(P(v)) = P^2(v) = P(v) = w.$$

□

Следующая теорема является ключевой в изучении представлений конечных групп. Она во многом сводит изучение любых конечномерных представлений к изучению неприводимых.

Теорема 2 (Теорема Машке)**.** *Пусть $|G| = n$ не делится на характеристику поля F. Тогда любое представление ρ группы G вполне приводимо.*

Доказательство. Для доказательства полной приводимости достаточно доказать, что у каждого инвариантного подпространства есть дополнительное инвариантное подпространство. Пусть $U \subset V$ – инвариантное подпространство. Рассмотрим некоторое (не обязательно инвариантное) дополнительное подпространство W, то есть выполнено $V = U \oplus W$. Можно рассмотреть проектор P на второе подпространство: $P(u+w) = w$. При этом $P^2 = P$.

Напомним, что любой оператор Q с условием $Q^2 = Q$ является проектором на $\operatorname{Im} Q$ вдоль $\operatorname{Ker} Q$. Наша цель – изменить проектор P так, чтобы измененный проектор P' был также проектором вдоль U на некоторое инвариантное подпространства W'. Тогда $V = U \oplus W'$.

Определим

$$P' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ P \circ \rho(g)^{-1}.$$

Поскольку $P(u) = 0$ для любого $u \in U$, выполнено $P \circ \rho(g)^{-1}(u) = 0$. Получаем

$$P'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ P \circ \rho(g)^{-1}(u) = 0.$$

То есть $U \subset \operatorname{Ker} P'$. Поскольку P – проектор на W вдоль U, для любого $g \in G$ выполнено $P \circ \rho(g)^{-1}(v) - \rho(g)^{-1}(v) \in U$. Домножая на $\rho(g)$, получаем

$$\rho(g) \circ P \circ \rho(g)^{-1}(v) - v \in U.$$

Следовательно, $P'(v) - v \in U$. Применяя P', получаем $P'^2(v) - P'(v) = 0$. То есть $P'^2 = P'$, что означает, что P' – проектор на свой образ, который мы обозначим W'.

Если $P'(v) = 0$, то $-v = P'(v) - v \in U$. Значит, $\operatorname{Ker} P' = U$.

Мы уже доказали, что $V = U \oplus W'$. Осталось объяснить, что W' – инвариантное подпространство.

Докажем, что для любого $h \in G$ выполнено $\rho(h) \circ P' = P' \circ \rho(h)$.

$$\rho(h) \circ P' = \rho(h) \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ P \circ \rho(g)^{-1} \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg) \circ P \circ \rho(g)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{hg \in G} \rho(hg) \circ P \circ \rho(hg)^{-1} \right) \circ \rho(h) = P' \circ \rho(h).$$

Пусть $w' \in W'$, тогда существует $v \in V$ с условием $P'(v) = w'$. Имеем

$$\rho(g)(w') = \rho(g) \circ P'(v) = P' \circ \rho(g)(v) \subset W'.$$

Значит, W' инвариантно. $\square$