Лекция 3

Определение 1. Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $g \in G$ выполнено $gH = Hg$. То, что H – нормальная подгруппа G обозначается так: $G \triangleright H$.

Обозначим через gHg^{-1} множество $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$.

Лемма 1. *Следующие условия равносильны:*
1) $G \triangleright H$,
2) для каждого $g \in G$ выполнено $gHg^{-1} = H$,
3) для каждого $g \in G$ выполнено $gHg^{-1} \subseteq H$,

Доказательство. $1 \Longrightarrow 2$ В множестве $gH = Hg$ каждый элемент имеет вид $gh_1 = h_2g$. При этом и h_1 и h_2 пробегают всю группу H. Домножим каждый элемент справа на g^{-1}, получим $gh_1g^{-1} = h_2$. То есть $gHg^{-1} = H$.

$2 \Longrightarrow 3$ Очевидно.

$3 \Longrightarrow 1$. Для каждых $g \in G$ и $h \in H$ выполнено $ghg^{-1} = \tilde{h} \in H$. Тогда $gh = ghg^{-1}g = \tilde{h}g$. Отсюда $gH \subseteq Hg$. Аналогично $hg = gg^{-1}hg = g\widehat{h}$ для $\widehat{h} = g^{-1}hg \in H$. Значит, $gH \supseteq Hg$. В итоге $gH = Hg$. □

Пример 1. *Любая подгруппа в абелевой группе нормальна, так как $ghg^{-1} = h$.*

Пример 2. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *– нормальная подгруппа в* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. *Действительно, пусть $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Тогда* $\det(ABA^{-1}) = \det A \det B (\det A)^{-1} = 1$. *То есть $ABA^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.*

Пример 3. *Подгруппа $\langle(1,2)\rangle = \{\mathrm{id}, (1,2)\} \subseteq S_3$ не является нормальной. В самом деле,*

$$(1,2,3)(1,2)(1,2,3)^{-1} = (1,2,3)(1,2)(1,3,2) = (2,3) \notin \langle(1,2)\rangle.$$

Определение 2. Пусть H – нормальная подгруппа в группе G. Факторгруппа G/H – это множество (левых, они же правые) смежных классов по подгруппе H с операцией

$$(g_1H) \cdot (g_2H) = (g_1g_2)H.$$

Определение умножения в факторгруппе требует проверки корректности, то есть проверки того, что результат умножения не зависит от выбора представителей в смежных классах. Потенциальная проблема содержится в том, что $g_1H = g_1'H$, $g_2H = g_2'H$, но при этом смежный класс g_1g_2H может не совпадать с $g_1'g_2'H$. Тогда умножение называется некорректным.

Предложение 1. *Пусть G – группа, H – подгруппа. Тогда умножение на множестве левых смежных классов корректно тогда и только тогда, когда H нормальна.*

Доказательство. Пусть H нормальна и $g_1H = g_1'H$, $g_2H = g_2'H$. Получаем, что $g_1'^{-1}g_1 \in H$ и $g_2'^{-1}g_2 \in H$. Обозначим $g_1'^{-1}g_1$ через h. Имеем

$$(g_1'g_2')^{-1}(g_1g_2) = g_2'^{-1}g_1'^{-1}g_1g_2 = g_2'^{-1}hg_2 \in H$$

Это означает, что g_1g_2H совпадает с $g_1'g_2'H$. Значит, умножение корректно.

Пусть теперь H не нормальна. Тогда найдутся $g \in G$ и $h \in H$ такие, что $ghg^{-1} \notin H$. Тогда $gH = (gh)H$. Рассмотрим следующие смежные классы: $gH = (gh)H$ и $g^{-1}H$. Имеем $gH \cdot g^{-1}H = H$, но $(gh)H \cdot g^{-1}H = (ghg^{-1})H \neq H$. Значит, умножение не корректно. □

Легко видеть, что G/H действительно группа. Ассоциативность произведения следует из ассоциативности произведения в G, единичный элемент – это $eH = H$, обратный к gH элемент – это $g^{-1}H$. Из теоремы Лагранжа следует, что если G – конечная группа, то $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$.

Пример 4. *Найдем, чему изоморфна факторгруппа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Подгруппа $n\mathbb{Z}$ нормальна, так как группа $\mathbb{Z}$ абелева. Смежные классы имеют вид $k+n\mathbb{Z}$. При этом $k+n\mathbb{Z} = l+\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда k и l имеют одинаковые остатки при делении на n. Сопоставим смежному классу $k+n\mathbb{Z}$ остаток при делении k на n. Докажем, что это сопоставление – это изоморфизм ψ между $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_n$. Действительно, сложению смежных классов соответствует сложение остатков. Кроме того ψ сюръективно, так как любой остаток – это остаток некоторого числа k, а значит, он равен $\psi(k+n\mathbb{Z})$. Для проверки инъективности ψ, воспользуемся критерием инъективности. Ядро ψ – это то, что переходит в остаток ноль, то есть смежный класс $n\mathbb{Z}$, который является нейтральным элементом фактор-группы.*

Определение 3. Пусть $\varphi\colon G \to H$ – гомоморфизм групп. Ядром гомоморфизма φ называется множество

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\} \subseteq G.$$

Образом гомоморфизма φ называется множество

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\} \subseteq H.$$

Поскольку $\varphi(e) = e$, нейтральный элемент всегда лежит в ядре.

Лемма 2. *Пусть $\varphi\colon G \to H$ – гомоморфизм. Тогда*
а) Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ – нормальная подгруппа в группе G.
б) $\operatorname{Im}\varphi$ – подгруппа в H.

Доказательство. а) Пусть $g_1, g_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = e\cdot e = e$. Значит, $g_1g_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$. То есть ядро замкнуто относительно операции. Кроме того

$$\varphi(g_1^{-1}) = \varphi(g_1^{-1})\varphi(g_1) = \varphi(g_1^{-1}g_1) = \varphi(e) = e.$$

Значит, $g_1^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Таким образом, ядро замкнуто относительно взятия обратного. Осталось заметить, что $e \in \operatorname{Ker}\varphi$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\varphi$ – подгруппа в G.

Докажем, что подгруппа $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq G$ нормальна. Пусть $g \in G$, $h \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e.$$

Значит, $ghg^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$, то есть $\operatorname{Ker}\varphi$ – нормальная подгруппа.

б) Пусть $h_1, h_2 \in \operatorname{Im}\varphi$. Тогда найдутся $g_1, g_2 \in G$ такие, что $h_1 = \varphi(g_1)$, $h_2 = \varphi(g_2)$. Тогда $h_1h_2 = \varphi(g_1g_2) \in \operatorname{Im}\varphi$ и $h_1^{-1} = \varphi(g_1^{-1}) \in \operatorname{Im}\varphi$. Кроме того $e = \varphi(e) \in \operatorname{Im}\varphi$. То есть образ замкнут относительно операции, взятия обратного и содержит единицу. Следовательно, $\operatorname{Im}\varphi$ – подгруппа в H. $\square$

Теорема 1. *(Теорема о гомоморфизме) Пусть $\varphi\colon G \to \widetilde{G}$ – гомоморфизм групп. Тогда $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\Psi\colon G/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi, \qquad \Psi(g\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(g).$$

Сперва нам надо проверить корректность отображения Ψ, то есть то, что оно не зависит от выбора представителя g из смежного класса. Для этого заметим, что если

$g\mathrm{Ker}\,\varphi = g'\mathrm{Ker}\,\varphi$, то $g'^{-1}g = h \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Тогда $g = g'h$. Получаем $\varphi(g) = \varphi(g'h) = \varphi(g')\varphi(h) = \varphi(g')e = \varphi(g')$. Таким образом, отображение Ψ определено корректно.

Докажем, что Ψ – изоморфизм. То, что Ψ –гомоморфизм следует из равенства:

$$\Psi((g\mathrm{Ker}\,\varphi)(f\mathrm{Ker}\,\varphi)) = \Psi(gf\mathrm{Ker}\,\varphi) = \varphi(gf) = \varphi(g)\varphi(f) = \Psi(g\mathrm{Ker}\,\varphi)\Psi(f\mathrm{Ker}\,\varphi).$$

Инъективность Ψ проверим по критерию инъективности. Если $g\mathrm{Ker}\,\varphi \in \mathrm{Ker}\,\Psi$, то $\Psi(g\mathrm{Ker}\,\varphi) = \varphi(g) = e$. Значит, $g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. То есть $g\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi$ – единица фактор-группы. Сюръективность Ψ очевидна, так как для любого элемента $\varphi(g)$ в $\mathrm{Im}\,\varphi$ в него отображается смежный класс $g\mathrm{Ker}\,\varphi$. □

Пример 5. *Найдем, чему изоморфна факторгруппа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ по теореме о гомоморффизме. Для того, чтобы применить теорему о гомоморфизме, нам нужно построить гомоморфизм $\varphi\colon Z \to G'$ для некторой группы G' такой, что $\mathrm{Ker}\,\varphi = n\mathbb{Z}$. Легко видеть, что подходит следующий гомоморфизм*

$$\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, \qquad k \mapsto k \,(\mathrm{mod}\, n)$$

Действительно, φ – гомоморфизм, $\mathrm{Ker}\,\varphi = n\mathbb{Z}$ и φ – сюръекция, то есть $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{Z}_n$. По теореме о гомоморфизме $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

Теорема 2. *(Критерий инъективности гомоморфизма) Гомоморфизм $\varphi\colon G \to H$ инъективен тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{e\}$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Ker}\,\varphi \neq \{e\}$. Тогда существует $g \neq e$, $g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. То есть $\varphi(g) = e = \varphi(e)$. Следовательно, гомоморфизм φ не инъективен.

Допустим, гомоморфизм φ не инъективен. Тогда $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ для некоторых $g_1 \neq g_2 \in G$. Значит, $\varphi(g_1g_2^{-1}) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} = e$. То есть $g_1g_2^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, но $g_1g_2^{-1} \neq e$. Значит, $\mathrm{Ker}\,\varphi \neq \{e\}$. □

Особый интерес представляют гомоморфизмы и изоморфизмы из группы в себя.

Определение 4. Изомомрфизм $\varphi\colon G \to G$ называется *автоморфизмом.*

Легко видеть, что композиция двух автоморфизмов – это автоморфизм. Множество автоморфизмов группы G с операцией композиции образует группу $\mathrm{Aut}(G)$ с нейтральным элементом id.

Пусть g – элемент группы G. Рассмотрим отображение $\varphi_g\colon G \to G$, определенное по правилу $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$.

Лемма 3. *Отображение φ_g является автоморфизмом группы G.*

Доказательство. Проверим, что φ_g – гомоморфизм:

$$\varphi_g(hf) = ghfg^{-1} = ghg^{-1}gfg^{-1} = \varphi_g(h)\varphi_g(f).$$

То, что φ_g – биекция следует из того, что существует обратное отображение. А именно, обратное к φ_g отображение – это $\varphi_{g^{-1}}$. □

Автоморфизм называются *внутренним*, если он имеет вид φ_g для некоторого $g \in G$.

Предложение 2. *Множество внутренних автоморфизмов с операцией композиции образует подгруппу $\mathrm{Inn}(G)$ в $\mathrm{Aut}(G)$.*

Доказательство. Докажем равенство $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$. Для этого применим этот гомоморфизм к элементу $s \in G$:

$$\varphi_g \circ \varphi_h(s) = \varphi_g(\varphi_h(s)) = \varphi_g(hsh^{-1}) = ghsh^{-1}g^{-1} = (gh)s(gh)^{-1} = \varphi_{gh}(s).$$

Из доказанного равенства следует замкнутость $\mathrm{Inn}(G)$ относительно композиции. Кроме того $\mathrm{id} = \varphi_e \in \mathrm{Inn}(G)$. Осталось проверить, что $\mathrm{Inn}(G)$ замкнуто относительно взятия обратного. Для этого заметим, что $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_e = \mathrm{id}$. $\square$

Лемма 4. *Группа внутренних автоморфизмов* $\mathrm{Inn}(G)$ *– нормальная подгруппа группы* $\mathrm{Aut}(G)$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\varphi_g \in \mathrm{Inn}(G)$. Тогда
$\psi\circ\varphi_g\circ\psi^{-1}(h) = \psi(\varphi_g(\psi^{-1}(h))) = \psi(g\psi^{-1}(h)g^{-1}) = \psi(g)\psi(\psi^{-1}(h))\psi(g^{-1}) = \psi(g)h\psi(g)^{-1} = \varphi_{\psi(g)}(h)$,
то есть $\psi \circ \varphi_g \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(g)} \in \mathrm{Inn}(G)$. $\square$