

Лекция 16.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

5 марта, 2024

Определение.

Линейным представлением группы G называется гомоморфизм $G \rightarrow GL(V)$.

Определение. Матричным представлением группы G называется гомоморфизм $G \rightarrow GL_n(F)$.

Выбор базиса в V устанавливает биекцию между линейными и матричными представлениями. Если выбрать другой базис, то все операторы представления сопрягутся матрицей перехода. Размерностью представления называется размерность пространства V . Мы ограничимся рассмотрением конечномерных представлений.

Определение.

Представление $G \rightarrow GL(V)$ называется точным, если его ядро состоит только из нейтрального элемента.

Определение

Пусть даны представления $\rho: G \rightarrow GL(V)$ и $\zeta: G \rightarrow GL(W)$. Морфизмом представлений называется линейное отображение $\varphi: V \rightarrow W$ такое, что для каждого $g \in G$ и для каждого $v \in V$ выполнено $\varphi(\rho(g)(v)) = \zeta(g)(\varphi(v))$.

Если φ – изоморфизм векторных пространств, то мы называем его изоморфизмом представлений.

Замечание. Если ρ и ζ – изоморфные линейные представления, то пространства V и W можно отождествить по изоморфизму φ . При этом базис V перейдет в базис W . Если взять эти соответствующие друг другу базисы и получить матричные представления, то получим одинаковые матричные представления.

Таким образом, матричные представления $\rho: G \rightarrow GL_n(F)$ и $\zeta: G \rightarrow GL_n(F)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица C такая, что для каждого $g \in G$ выполнено $C\rho(g)C^{-1} = \zeta(g)$.

Определение.

Пусть $\rho: G \rightarrow GL(V)$ – линейное представление.

Подпространство $U \subset V$ называется инвариантным, если для любого $g \in G$ выполнено $\rho(g)(U) \subset U$.

Определение.

Представление $\rho: G \rightarrow GL(V)$ называется неприводимым если не существует инвариантных подпространств $U \subset V$ кроме $\{0\}$ и V .

Пример.

Группа S_3 изоморфна группе симметрий треугольника D_3 . Построим следующее двумерное представление группы S_3 . Поместим начало координат в центр треугольника. Тогда любая симметрия треугольника задает линейное преобразование плоскости. Например, повороты запишутся матрицами

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Данное представление неприводимо (даже над \mathbb{C}).

В самом деле, если двумерное представление приводимо, то у всех его операторов есть общий собственный вектор. Если взять треугольник с горизонтальной стороной, то одна из симметрий запишется матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. У такой матрицы два собственных вектора (с точностью до пропорциональности): $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Но ни один из них не является собственным вектором матриц поворотов.

Определение.

Пусть $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ и $\zeta: G \rightarrow \text{GL}(W)$ – два представления одной и той же группы G . Прямой суммой представлений ρ и ζ называется представление $\rho \oplus \zeta: G \rightarrow \text{GL}(V \oplus W)$, определенное по правилу:

$$\rho \oplus \zeta(g)(v + w) = \rho(g)(v) + \zeta(g)(w).$$

Если выбрать базис в $V \oplus W$, являющийся объединением базисов V и W , то матрица оператора $\rho \oplus \zeta(g)$ имеет в этом базисе блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \zeta(g) \end{pmatrix}.$$

Определение.

Представление называется вполне приводимым, если оно изоморфно прямой сумме неприводимых.

Замечание.

В частности любое неприводимое представление вполне

Пример не вполне приводимого представления.

Рассмотрим следующее представление группы \mathbb{Z} (над полем \mathbb{R} или \mathbb{C}):

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно, что $\langle e_1 \rangle$ – инвариантное подпространство. Но если бы это представление было вполне приводимым, оно бы раскладывалось в сумму двух одномерных. Тогда в подходящем базисе все матрицы были бы диагональными. Однако матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не диагонализуема.

Теорема.

У группы G ровно $|G/G'|$ одномерных представлений.

Теорема.

Если F – алгебраически замкнутое поле, то любое неприводимое представление ρ абелевой группы G одномерно.

Предложение.

Если для любого инвариантного подпространства найдется дополнительное инвариантное подпространство, то представление вполне приводимо.

Теорема Машке. Пусть $|G| = n$ не делится на характеристику поля F . Тогда любое представление ρ группы G вполне приводимо.

Доказательство. Для доказательства полной приводимости достаточно доказать, что у каждого инвариантного подпространства есть дополнительное инвариантное подпространство. Пусть $U \subset V$ – инвариантное подпространство. Рассмотрим некоторое (не обязательно инвариантное) дополнительное подпространство W , то есть выполнено $V = U \oplus W$. Можно рассмотреть проектор P на второе подпространство: $P(u + w) = w$. При этом $P^2 = P$. Напомним, что любой оператор Q с условием $Q^2 = Q$ является проектором на $\text{Im } Q$ вдоль $\text{Ker } Q$. Наша цель – изменить проектор P так, чтобы измененный проектор P' был также проектором вдоль U на некоторое инвариантное подпространства W' . Тогда $V = U \oplus W'$.

Продолжение доказательства.

Определим

$$P' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) P \rho(g)^{-1}.$$

Поскольку $P(u) = 0$ для любого $u \in U$, выполнено $P \rho(g)^{-1}(u) = 0$. Получаем

$$P'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) P \rho(g)^{-1}(u) = 0.$$

То есть $U \subset \text{Ker } P'$. Поскольку P – проектор на W вдоль U , для любого $g \in G$ выполнено $P \rho(g)^{-1}(v) - \rho(g)^{-1}(v) \in U$. Домножая на $\rho(g)$, получаем $\rho(g) P \rho(g)^{-1}(v) - v \in U$. Следовательно, $P'(v) - v \in U$. Применяя P' , получаем $P'^2(v) - P'(v) = 0$. То есть $P'^2 = P'$, что означает, что P' – проектор на свой образ, который мы обозначим W' . Если $P'(v) = 0$, то $-v = P'(v) - v \in U$. Значит, $\text{Ker } P' = U$.

Продолжение доказательства.

Мы уже доказали, что $V = U \oplus W'$. Осталось объяснить, что W' – инвариантное подпространство.

Докажем, что для любого $h \in G$ выполнено $\rho(h)P' = P'\rho(h)$.

$$\begin{aligned}\rho(h)P' &= \rho(h) \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)P\rho(g)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg)P\rho(g)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{hg \in G} \rho(hg)P\rho(hg)^{-1}\rho(h) = P'\rho(h).\end{aligned}$$

Пусть $w' \in W'$, тогда существует $v \in V$ с условием $P'(v) = w'$.

Имеем $\rho(g)(w') = \rho(g)P'(v) = P'\rho(g)(v) \in W'$.

Значит, W' инвариантно.

Приведем примеры, показывающие, что условие конечности группы и условие, что $\text{char} F \nmid n$ в теореме Машке существенные.

Пример 1 (уже был).

Представление группы \mathbb{Z} (над полем \mathbb{R} или \mathbb{C}):

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приводимо, но не вполне приводимо. К этому примеру не применима теорема Машке, так как группа бесконечна.

Пример 2.

Представление группы \mathbb{Z}_p (над полем \mathbb{Z}_p):

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично примеру 1, это представление приводимо, но не вполне приводимо.

Пример.

Мономиальное представление ρ группы S_n вполне приводимо. Оно раскладывается в прямую сумму 2-х подпредставлений. Первое подпредставление одномерно (и следовательно неприводимо) и является ограничением ρ на инвариантное подпространство $U = \langle e_1 + \dots + e_n \rangle$.

Второе подпредставление – это ограничение ρ на инвариантное подпространство $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum x_i = 0\}$.

Осталось объяснить, что $\rho|_W$ неприводимо.

Пусть $L \subset W$ – ненулевое инвариантное подпространство.

Возьмем вектор $v = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0) \in L$. Тогда найдутся $i \neq j$ такие, что $x_i \neq x_j$. Применим $\rho((i, j))$ к вектору v . При этом x_i и x_j поменяются местами. Тогда $v - \rho((i, j))(v) = (0, \dots, x_i - x_j, 0, \dots, 0, x_j - x_i, 0, \dots, 0) \in L$. То есть $e_i - e_j \in L$. Применяя к $e_i - e_j$ оператор $\rho(\sigma)$, где $\sigma(i) = k$, $\sigma(j) = m$ получаем $e_k - e_m \in L$. Однако $\langle e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n \rangle = W$. То есть $L = W$.

Лемма Шура. Пусть $\rho: G \rightarrow GL(V)$ и $\zeta: G \rightarrow GL(W)$ – два неприводимых представления. И пусть $\varphi: V \rightarrow W$ – морфизм этих представлений. Тогда

- 1) если ρ и ζ не изоморфны, то $\varphi = 0$,
- 2) если ρ и ζ изоморфны, то φ – либо нулевое отображение, либо изоморфизм,
- 3) если $V = W$, $\rho = \zeta$ и представления над алгебраически замкнутым полем, то $\varphi = \lambda \text{id}$.

Доказательство. 1 и 2) Докажем, что $\text{Ker}(\varphi)$ является ρ -инвариантным подпространством в V . Действительно, пусть $v \in \text{Ker}(\varphi)$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено $\zeta(g) \circ \varphi(v) = 0$. Однако $\zeta(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(g)$. Значит, $\rho(g)(v) \in \text{Ker} \varphi$. Следовательно, так как ρ неприводимо, либо $\text{Ker} \varphi = V$ и тогда φ – нулевое отображение, либо $\text{Ker} \varphi = \{0\}$ и φ – инъекция.

Продолжение доказательства.

Докажем, что $\text{Im } \varphi \subset W$ является ζ -инвариантным подпространством. Возьмем $\varphi(v) \in \text{Im } \varphi$ и применим $\zeta(g)$. Получаем $\zeta(g) \circ \varphi(v) = \varphi \circ \rho(g)(v) \in \text{Im } \varphi$. Так как ζ – неприводимое представление, либо $\text{Im } \varphi = \{0\}$ и тогда φ – нулевое отображение, либо φ – сюръекция.

Итак, либо $\varphi = 0$, либо φ – биекция, то есть изоморфизм.

3) Если F алгебраически замкнуто и $V = W$, то у оператора φ есть собственное значение λ . Тогда у оператора $\varphi - \lambda \text{id}$ есть нетривиальное ядро. По предыдущему тогда $\varphi - \lambda \text{id} = 0$.