Лекция 19.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

26 марта, 2024

Пусть задано действие G на X. Для $g \in G$ обозначим через X^g множество

$$X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Лемма Бернсайда

Пусть конечная группа G действует на множестве X тогда количество орбит этого действия равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Доказательство. Посчитаем двумя различными способами количество пар (x, g) таких, что $g \cdot x = x$. Обозначим множество таких пар за M. Тогда с одной стороны

$$|M| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

С другой стороны

$$|M| = \sum_{x\in X} |\mathrm{St}(x)| = \sum_{x\in X} \frac{|G|}{|Gx|} = |G| \sum_{x\in X} \frac{1}{|Gx|}. \qquad (**)$$

В последней сумме заметим, что суммирование по всему X можно разбить на суммирование по непересекающимся орбитам. Пусть O – одна из орбит. Тогда

$$\sum_{x\in O} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{x\in O} \frac{1}{|O|} = 1$$

Значит, самое правое выражение в $(**)$ равно $|G|$ умножить на количество орбит. Приравнивая ко второму выражению для $|M|$ и разделив на $|G|$, получаем утверждение леммы.

Замечание.

Если множество X бесконечно, то обе части равенства из леммы Бернсайда будут бесконечны. В самом деле, количество орбит бесконечно так как количество элементов в каждой орбите не больше $|G|$. Выражение $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$ бесконечно, так как $X^e = X$ – бесконечное множество.

Пример.

Решим с помощью леммы Бернсайда такую задачу: сколько существует различных способов покрасить ребра проволочного правильного 7-угольника в 3 цвета? (Имеется в виду, что этот проволочный 7-угольник находится в трехмерном пространстве и две покраски одинаковы, если их можно совместить.)
Рассмотрим закрепленные покраски 7-угольника, то есть занумеруем ребра и для каждого ребра будет 3 варианта покрасить его. Таких закрепленных покрасок существует 3^7. На множестве X закрепленных покрасок действует группа D_7 и нам нужно посчитать количество орбит (так как фраза "окраски одинаковы, если их можно совместить"означает, что покраски считаются одинаковыми, если лежат в одной орбите).

Чтобы применить формулу из леммы Бернсайда нужно посчитать $|X^g|$ для всех $g \in D_7$. Для $g = e$ имеем $|X^e| = 3^7$. Для любого нетривиального поворота легко видеть, что X^g состоит только из одноцветных закрепленных покрасок, а значит, $|X^g| = 3$. Для симметрии все врешины 7-угольника разбиваются на 3 пары симметричных вершин и одну, лежащую на оси симметрии. Количество покрасок из $|X^g|$ равно 3^4 так как каждую пару надо покрасить в один цвет. В итоге количество орбит равно

$$\frac{1}{14}(3^7 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3^4) = 198.$$