▼ Вопросы для подготовки к коллоквиуму по Линейной алгебре и геометрии

(лектор: О.В. Куликова, 2023)

1. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Матрица перехода. Изменение координат вектора при переходе от базиса к базису.

2. Изоморфизм векторных пространств одинаковой размерности.

3. Векторные подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Формула Грассмана.

4. Прямая сумма подпространств.

5. Сопряженное пространство и его размерность. Канонический изоморфизм V и V^{**}.

6. Пусть даны два базиса E и F векторного пространства V, T - матрица перехода от E к F. Рассмотрим сопряженные к ним базисы $\bar{E}$ и $\bar{F}$. Какова матрица перехода от $\bar{F}$ к $\bar{E}$?

7. Всякое подпространство есть пересечение ядер некоторого множества линейных функций. Связь с однородными системами линейных уравнений.

8. Линейные отображения, их задание матрицами. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к другим базисам. Ранг линейного отображения. Размерность ядра и образа.

9. Линейные операторы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Ранг и определитель линейного оператора. Алгебра линейных операторов. Изоморфизм алгебры матриц и алгебры линейных операторов.

10. Инвариантные подпространства. Вид матрицы линейного оператора при наличии инвариантных подпространств. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен.

12. Собственные подпространства. Если k - кратность собственного значения λ линейного оператора A, то $\dim \mathrm{V}_\lambda \le \mathrm{k}$.

13. Линейная независимость системы собственных векторов линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям. Критерий существования базиса из собственных векторов линейного оператора.

11. Любой линейный оператор над полем действительных чисел обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

14. Пусть $\mathrm{A}: \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ - линейный оператор конечномерного векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем F. Тогда существует базис, в котором матрица линейного оператора A треугольна.

15. Теорема Гамильтона-Кэли.

16. Минимальный многочлен и его свойства.

17. Линейный оператор $A: V \to V$ векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем Fдиагонализируем тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных корней.

18. Жордановы клетки и матрицы, их характеристические и минимальные многочлены. Жорданов базис.

19. Пусть $A: V \to V$ - линейный оператор векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем F. Тогда в V имеется жорданов базис для A.

20. Единственность жордановой нормальной формы.

21. Пусть $A: V \to V$ - линейный оператор векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем F. Тогда V распадается в прямую сумму корневых подпространств, соответствующих всем (различным) собственным значениям оператора A.

22. Билинейные функции и их матрицы. Изменения матрицы при замене базиса. Ранг билинейной функции. Симметрические билинейные функции. Канонический базис для симметрической билинейной функции.

23. Квадратичные формы и их матрицы. Процедура поляризации. Канонический вид квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа.

24. Нормальной вид квадратичной формы над полем комплексных и действительных чисел. Закон инерции.

25. Формула Якоби. Положительная определенность. Критерий Сильвестра.

26. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами и длина вектора в евклидовом пространстве.

27. Матрица Грама и ее свойства.

28. Линейная независимость системы ненулевых ортогональных векторов. Ортогональный и ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

29. Ортогональные матрицы как матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Множество $O(n)$ ортогональных матриц порядка n образует группу по умножении..

30. Ортогональное дополнение.

31. Теорема Пифагора. Угол и расстояние между вектором и подпространством.

32. Изоморфизм векторных пространств V и V^* в случае евклидовых пространств.

33. Связь между билинейными функциями и линейными операторами в евклидовом пространстве. Линейный оператор, сопряженный к данному. Свойства.

34. Самосопряженный (симметрический) оператор в евклидовом пространстве. Матрица симметрического оператора в ортонормированном базисе. Свойства. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно симметрического линейного оператора. Канонический вид симметрического оператора евклидова пространства.

35. Приведение квадратичной формы к главным осям в евклидовом пространстве. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов.

36. Ортогональный оператор в евклидовом пространстве. Матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе. Свойства. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно ортогонального линейного оператора. Канонический вид ортогонального оператора евклидова пространства.