

Вопросы к коллоквиуму по линейной алгебре – весна 2024 года.

Лектор И.А. Чубаров.

(предварительная версия)

1. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Примеры.
2. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора при замене базиса.
3. Изоморфизм векторных пространств одинаковой размерности.
4. Векторные подпространства, равносильность двух способов их задания. Сумма и пересечение подпространств. Формула Грассмана.
5. Прямая сумма подпространств. Внешняя прямая сумма векторных пространств.
6. Факторпространство, его размерность. Коразмерность. Связь с решениями неоднородной системы линейных уравнений.
7. Линейные функции на векторном пространстве, их ядра. Изменение коэффициентов линейной формы при замене базиса. Сопряженное пространство V^* , дуальный базис. Канонический изоморфизм V и V^{**} .
8. Линейные отображения и операторы. Ядро и образ, связь их размерностей. Критерий инъективности.
9. Задание линейных отображений (операторов) матрицами. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к другим базисам. Нахождение ядра и образа при помощи матрицы.
10. Линейные операторы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Подобные матрицы.
11. Векторное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизм алгебры матриц и алгебры линейных операторов.
12. Инвариантные подпространства линейного оператора. Ограничение линейного оператора на инвариантное подпространство. Вид матрицы линейного оператора при наличии инвариантных подпространств.
13. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейная независимость собственных векторов линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям.
14. Вычисление собственных значений и собственных векторов с помощью матрицы. Характеристический многочлен.
15. Собственные подпространства. Неравенство между размерностью собственного подпространства и кратностью корня характеристического многочлена.
16. Диагонализуемость (матрицы) линейного оператора. Критерии диагонализуемости и достаточное условие.
17. Аннулирующие многочлены линейного оператора (матрицы). Минимальный многочлен. Критерий диагонализуемости в терминах минимального многочлена.
18. Теорема Гамильтона-Кэли и ее следствия.
19. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для любого линейного оператора над полем действительных чисел.
20. Корневые подпространства. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.
21. Жордановы клетки и матрицы, их характеристические и минимальные многочлены. Жорданов базис.
22. Существование жорданова базиса для нильпотентного оператора (для матрицы с единственным собственным значением = характеристическим корнем).
23. Существование жордановой нормальной формы матрицы над алгебраически замкнутым полем.
24. Единственность жордановой нормальной формы.

25. Билинейные функции и их матрицы. Изменение матрицы при замене базиса. Ранг билинейной функции. Симметрические билинейные функции. Билинейные функции и формы.
26. Квадратичные формы и их матрицы. Восстановление симметрической билинейной функции по данной квадратичной функции. Диагональный вид квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа.
27. Нормальный (канонический) вид квадратичной формы над полями действительных и комплексных чисел. Закон инерции.
28. Теорема Якоби.
29. Положительной и отрицательно определенные вещественные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
30. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами и длина вектора в евклидовом пространстве. Неравенство треугольника. Вычисление скалярного произведения в координатах. Матрица Грама и ее свойства.
31. Ортогональность векторов. Линейная независимость системы ненулевых ортогональных векторов. Ортогональный и ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
32. Ортогональные матрицы как матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Множество $O(n)$ ортогональных матриц порядка n образует группу по умножению.
33. Ортогональное дополнение. Разложение конечномерного пространства в прямую сумму подпространства и ортогонального дополнения к нему. Ортогональная проекция.
34. Теорема Пифагора. Угол и расстояние между вектором и подпространством.
35. Изоморфизм евклидовых пространств одинаковой размерности. Изоморфизм евклидова пространства и его сопряженного.