

Вопросы к коллоквиуму по алгебре  
1-й курс, 2-й поток, 2024  
(лектор: Куликова О.В)

1. Матрицы: определение. Квадратные, диагональные, верхние и нижние треугольные матрицы. Единичная и нулевая матрицы. Лидеры строк матрицы. Матрицы ступенчатого вида и улучшенного ступенчатого вида. Элементарные преобразования над строками. Метод Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду. Приведение к улучшенному ступенчатому виду.
2. Системы линейных уравнений (СЛУ). Совместные и несовместные, определённые и неопределённые СЛУ. Матрица коэффициентов и расширенная матрица системы. Элементарные преобразования над уравнениями системы. Метод Гаусса решения СЛУ. Однородные системы линейных уравнений, их совместность. Однородные СЛУ с числом уравнений меньше числа неизвестных.
3. Векторные пространства над  $\mathbb{R}$ : определение и примеры. Следствия из аксиом. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Критерий линейной зависимости. Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем. Векторные подпространства: определение и примеры.
4. Основная лемма о линейной зависимости.
5. Линейная оболочка системы векторов. Определение множества, порождающего векторное пространство. Определение базиса (два эквивалентных определения). Координаты вектора в базисе. Всякое конечнопорожденное векторное пространство обладает базисом. Все базисы конечнопорожденного векторного пространства содержат одно и то же число векторов. Определение размерности векторного пространства. Стандартный базис в  $\mathbb{R}^n$ .
6. Всякая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов является базисом линейной оболочки системы. Всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства можно дополнить до базиса.
7. Определение ранга системы векторов. Определение ранга матрицы как ранга системы ее строк. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях над строками. Ранг матрицы ступенчатого вида равен числу ее ненулевых строк.
8. Ранг системы столбцов матрицы не меняется при элементарных преобразованиях над строками. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях над столбцами. Ранг системы строк матрицы равен рангу системы ее столбцов.

9. Критерий совместности (теорема Кронекера-Капелли) и критерий определенности СЛУ в терминах рангов матриц. Однородные СЛУ. Свойства решений однородной СЛУ. Пространство решений однородной СЛУ и его базис (фундаментальная система решений). Теорема о размерности пространства решений однородной СЛУ.
10. Связь между множествами решений совместной системы линейных уравнений и ассоциированной с ней системы однородных линейных уравнений.
11. Изоморфизм векторных пространств. Всякое  $n$ -мерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$  изоморфно пространству  $\mathbb{R}^n$ .
12. Линейные отображения векторных пространств. Задание линейного отображения матрицей. Однозначность задания.
13. Операции над линейными отображениями и операции над их матрицами.
14. Операции сложения матриц и умножения матриц на число, свойства. Стандартный базис в пространстве матриц. Умножение матриц, свойства. Транспонирование матриц, свойства.
15. Размерность подпространства конечномерного векторного пространства. Ранг суммы матриц. Ранг произведения матриц.
16. Определение перестановки из  $n$  элементов. Четность и знак перестановки, их изменение при любой транспозиции. Число перестановок, число четных (нечетных) перестановок.
17. Определитель квадратной матрицы: формула полного разложения определителя. Характеризация определителя как полилинейной кососимметрической функции строк.
18. Элементарные преобразования над строками определителя. Определитель треугольной матрицы. Вычисление определителя посредством приведения к треугольному виду.
19. Определитель транспонированной матрицы. Определитель как функция от столбцов матрицы.
20. К какому виду можно привести матрицу с помощью элементарных преобразований, если определитель матрицы равен нулю (отличен от нуля)? Определитель матрицы с углом нулей.
21. Элементарные матрицы, их связь с элементарными преобразованиями над строками и столбцами матрицы. Определитель произведения матриц.
22. Подматрица. Минор. Дополнительный минор элемента и алгебраическое дополнение элемента. Разложение определителя по строке (столбцу). Фальшивое разложение. Определитель Вандермонда.
23. Критерий невырожденности квадратной матрицы в терминах ее определителя. Теорема о ранге матрицы (характеризация ранга матрицы в терминах миноров). Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.