

Вопросы к экзамену по алгебре  
1 курс, Вечернее отделение, 2021  
(Куликова О.В)

1. Матрицы: определение. Квадратные, диагональные, (главная и побочная диагональ), верхние и нижние треугольные матрицы. Операции сложения и умножения на число. Свойства.
2. Ведущие элементы (лидеры) строк матрицы. Матрицы ступенчатого вида и улучшенного ступенчатого вида. Элементарные преобразования над строками. Метод Гаусса приведения матрицы к ступенчатому (и улучшенному ступенчатому) виду.
3. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Совместные и несовместные, определённые и неопределённые СЛАУ. Матрица коэффициентов и расширенная матрица системы. Метод Гаусса решения СЛАУ. Однородные системы линейных уравнений, их совместность. Однородные СЛАУ с числом уравнений меньше числа неизвестных.
4. Векторное пространство над  $\mathbb{R}$ . Примеры. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Критерий линейной зависимости. Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем.
5. Определение векторного подпространства. Примеры. Линейная оболочка системы векторов. Определение множества, порождающего векторное пространство. Основная лемма о линейной зависимости.
6. Определение базиса. Свойства. Всякое конечномерное векторное подпространство обладает базисом. Все базисы конечномерного векторного пространства содержат одно и то же число векторов. Определение размерности векторного пространства. Примеры.
7. Всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства можно дополнить до базиса.
8. Определение ранга системы векторов. Определение ранга матрицы как ранга системы ее строк. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях над строками. Ранг матрицы ступенчатого вида равен числу ее ненулевых строк.
9. Ранг системы столбцов матрицы не меняется при элементарных преобразованиях над строками. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях над столбцами. Ранг системы строк матрицы равен рангу системы ее столбцов.
10. Критерий совместности и определенности СЛАУ в терминах рангов матриц.
11. Однородные СЛАУ. Свойства решений однородной СЛАУ. Подпространство решений однородной СЛАУ и его базис (фундаментальная система решений). Теорема о размерности подпространства решений однородной СЛАУ.

- 12.Связь между множествами решений совместной системы линейных уравнений и соответствующей системы однородных линейных уравнений.
- 13.Определение перестановки из  $n$  элементов. Инверсии и знак перестановки. Свойства перестановок.
- 14.Формула полного разложения определителя. Определитель как полилинейная кососимметрическая функция.
- 15.Элементарные преобразования над строками определителя. Определитель треугольной матрицы. Вычисление определителя посредством приведения к треугольному виду.
- 16.Определитель транспонированной матрицы.
- 17.К какому виду можно привести матрицу с помощью элементарных преобразований, если определитель матрицы равен нулю (отличен от нуля)? Определитель матрицы с углом нулей.
- 18.Разложение определителя по строке (столбцу). Фальшивое разложение.
- 19.Определитель Вандермонда
- 20.Умножение матриц, свойства. Транспонирование матриц, свойства.
- 21.Ранг суммы матриц. Ранг произведения матриц.
- 22.Элементарные матрицы, их связь с элементарными преобразованиями над строками и столбцами матрицы.
- 23.Определитель произведения матриц.
- 24.Критерий равенства определителя нулю. Теорема о ранге матрицы (характеризация матрицы в терминах миноров).
- 25.Обратные матрицы. Критерий существования обратной матрицы.
- 26.Обоснование метода элементарных преобразований для нахождения обратной матрицы.
- 27.Матричные уравнения. Правило Крамера.
- 28.Бинарные операции. Определение коммутативности, ассоциативности бинарной операции, нейтрального элемента, обратного элемента, обратимого элемента. Примеры. Утверждение об единственности нейтрального элемента. Утверждение об единственности обратного элемента. Определение группоида, полугруппы, моноида, группы. Примеры.
- 29.Группа преобразований. Группа подстановок. Разложение подстановки в произведение независимых циклов. Свойства.
- 30.Умножение на транспозицию. Разложение подстановки в произведение транспозиций. Четность. Свойства.
- 31.Определение кольца. Определение коммутативного (ассоциативного, с единицей) кольца. Примеры. Простейшие свойства. Определение обратимых элементов и делителей нуля. Простейшие свойства. Определение мультипликативной группы кольца. Примеры.
- 32.Определение поля. Примеры. В поле нет делителей нуля. Определение характеристики поля. Свойство характеристики.
- 33.Кольцо вычетов по модулю  $n$ . Утверждение о том, когда кольцо вычетов по модулю  $n$  является полем.

34. Поле комплексных чисел. Операции в алгебраической форме. Свойства.
35. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Возведение в степень. Формула Муавра. Извлечение корня из ненулевого комплексного числа.
36. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена. Свойства. Отсутствие делителей нуля и обратимые элементы в кольце многочленов над полем.
37. Деление с остатком в кольце многочленов над полем. Наибольший общий делитель, его линейное выражение через заданные многочлены, алгоритм Евклида.
38. Многочлены как функции. Разные многочлены над бесконечным полем задают разные функции.
39. Теорема Безу. Схема Горнера. Корни многочлена, кратность корня. Следствие из теоремы Безу. Число корней многочлена.
40. Формальная производная многочлена от одной переменной. Кратные корни. Понижение кратности при дифференцировании многочленов от одной переменной над полем характеристики 0.
41. Теорема об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел (основная теорема алгебры) (б/д). Следствия. Комплексные корни многочленов с вещественными коэффициентами. Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на линейные множители и квадратичные множители с отрицательным дискриминантом.
42. Неприводимые многочлены. Неприводимые многочлены над полем комплексных и полем действительных чисел. Факториальность кольца многочленов от одной переменной над полем (б/д). Кратные неприводимые множители. Отделение кратных множителей.
43. Поле частных. Поле рациональных функций. Простейшие и правильные дроби. Примеры. Теорема о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей (б/д).
44. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Степень многочлена от нескольких переменных. Однородные многочлены. Лексикографический порядок. Старший член многочлена. Лемма о старшем члене произведения многочленов.
45. Определение симметрического многочлена. Лемма о старшем члене симметрического многочлена. Элементарные симметрические многочлены. Лемма об одночлене симметрических многочленов.
46. Теорема о представлении симметрического многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов (идея д-ва). Формулы Виета.