Вопросы к экзамену по линейной алгебре – весна 2025 года.

Лектор И.А. Чубаров.

1. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Примеры.
2. Матрица перехода от одного базиса к другому, ее свойства. Изменение координат вектора при замене базиса.
3. Векторные подпространства, равносильность двух способов их задания. Сумма и пересечение подпространств. Формула Грассмана.
4. Прямая сумма подпространств: определение и равносильные условия. Существование прямого дополнения к подпространству. Внешняя прямая сумма векторных пространств, превращение ее в прямую сумму подпространств.
5. Факторпространство, его размерность. Корамерность. Связь с решениями неоднородной системы линейных уравнений.
6. Линейные функции на векторном пространстве, их ядра. Изменение коэффициентов линейной формы при замене базиса. Сопряженное пространство V^* , дуальный базис. Канонический изоморфизм V и V^{**} .
7. Линейные отображения и операторы. Ядро и образ, связь их размерностей. Критерий инъективности. Существование и единственность линейного отображения, которое отображает базис первого пространства в произвольные векторы второго пространства.
8. Теорема об изоморфизме векторных пространств. Изоморфизм образа векторного пространства при линейном отображении и факторпространства по ядру.
9. Задание линейных отображений (операторов) матрицами. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к другим базисам. Нахождение ядра и образа при помощи матрицы.
10. Линейные операторы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Подобные матрицы. Некоторые инварианты подобных матриц.
11. Векторное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизм алгебры матриц и алгебры линейных операторов.
12. Инвариантные подпространства линейного оператора. Ограничение линейного оператора на инвариантное подпространство. Вид матрицы линейного оператора при наличии инвариантного подпространства и инвариантного дополнения.
13. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейная независимость собственных векторов линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям.
14. Вычисление собственных значений и собственных векторов с помощью матрицы. Характеристический многочлен, его инвариантность. Выражения коэффициента при λ^{n-1} и свободного члена через характеристические корни.
15. Собственные подпространства. Неравенство между размерностью собственного подпространства и кратностью корня характеристического многочлена.
16. Диагонализируемость (матрицы) линейного оператора. Критерии диагонализируемости и достаточное условие.
17. Аннулирующие многочлены линейного оператора (матрицы). Минимальный многочлен, его связь с характеристическим многочленом.
18. Теорема Гамильтона-Кэли.
19. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора в конечномерном пространстве над полем действительных чисел.
20. Корневые подпространства. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.

21. Жордановы клетки и матрицы, их характеристические и минимальные многочлены. Жорданов базис.
22. Существование жорданова базиса для нильпотентного оператора (для матрицы с единственным собственным значением = характеристическим корнем).
23. Существование жордановой нормальной формы матрицы над полем, содержащим все корни характеристического многочлена.
24. Единственность жордановой нормальной формы. Критерий диагонализируемости в терминах минимального многочлена.
25. Билинейные функции и их матрицы. Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса. Ранг билинейной функции. Симметрические билинейные функции.
26. Квадратичные формы и их матрицы. Восстановление симметрической билинейной функции по данной квадратичной функции. Диагональный вид квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа.
27. Нормальный (канонический) вид квадратичной формы над полями действительных и комплексных чисел. Закон инерции.
28. Ортогонализация базиса относительно невырожденной симметрической билинейной формы. Теорема Якоби.
29. Положительно и отрицательно определенные вещественные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
30. Классификация кососимметрических билинейных форм (над полем характеристики, не равной 2).
31. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами и длина вектора в евклидовом пространстве. Неравенство треугольника.
32. Вычисление скалярного произведения в координатах. Матрица Грама и ее свойства. Ортогональность векторов. Линейная независимость системы ненулевых ортогональных векторов.
33. Ортогональный и ортонормированный базис. Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональные матрицы как матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому.
34. Ортогональное дополнение. Свойства операции ортогонального дополнения.
35. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и ортогонального дополнения к нему. Ортогональная проекция.
36. Теорема Пифагора. Расстояние и угол между вектором и подпространством. Объем n -мерного параллелепипеда.
37. Изоморфизм евклидовых пространств одинаковой размерности. Изоморфизм евклидова пространства и его сопряженного.
38. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Оператор, сопряженный линейному оператору, его матрица и свойства.
39. Самосопряженный линейный оператор, его свойства и матрица. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов.
40. Ортогональный оператор, его свойства и матрица. Канонический вид матрицы ортогонального оператора.
41. Полярное разложение (матрицы) невырожденного линейного оператора в евклидовом пространстве. Сингулярное разложение.
42. Билинейные и квадратичные функции на евклидовом пространстве. Взаимно однозначное соответствие между (симметрическими) билинейными формами и (самосопряженными) линейными операторами. Приведение квадратичной формы к главным осям.

43. Приведение к диагональному виду пары форм, одна из которых положительно определена.
44. Полуторалинейные функции и формы. Эрмитовы формы и эрмитовы матрицы. Канонический вид эрмитовой квадратичной формы. Критерий Сильвестра.
45. Унитарное (эрмитово) пространство. Ортогонализация. Ортогональные и ортонормированные базисы. Матрица перехода между ортонормированными базисами.
46. Самосопряженные (эрмитовы) операторы в унитарном пространстве, их свойства. Теорема о существовании ортонормированного базиса из собственных векторов эрмитова оператора. Приведение эрмитовой квадратичной формы к главным осям.
47. Унитарные операторы в унитарном пространстве, их свойства. Теорема о существовании ортонормированного базиса из собственных векторов унитарного оператора.
48. Аффинное пространство, основные понятия. Аффинизация векторного пространства. Аффинная система координат, изменение координат при замене системы координат.
49. Аффинно независимые системы точек. Барицентрическая комбинация точек. Примеры.
50. Аффинное подпространство (плоскость), его размерность. Геометрический смысл множества решений неоднородной системы линейных уравнений. Задание плоскости (неоднородной) системой линейных уравнений.
51. Взаимное расположение двух плоскостей. Пересечение и аффинная оболочка двух аффинных плоскостей. Аффинная оболочка подмножества аффинного подпространства. Аффинная оболочка двух аффинных плоскостей, её размерность.
52. Аффинное отображение и его линейная часть (дифференциал). Композиция аффинных отображений. Критерий обратимости в терминах линейной части. Матрица аффинного отображения.
53. Аффинные преобразования. Существование и единственность аффинного преобразования, переводящего n -мерного аффинного пространства в другую систему из $(n+1)$ аффинно независимых точек
54. Разложение биективного аффинного преобразования в композицию параллельного переноса и преобразования с неподвижной точкой.
55. Аффинное евклидово пространство. Теорема об изоморфизме. Расстояние между двумя плоскостями.
56. Ортогональные аффинные преобразования (движения). Собственные и несобственные движения. Разложение движения в композицию параллельного переноса и ортогонального преобразования с неподвижной точкой.
57. Описание движений аффинных евклидовых пространств размерностей ≤ 3 .
58. Определение тензора типа (p,q) на векторном пространстве. Линейные операции. Отождествление тензоров малых валентностей с геометрическими объектами.
59. Произведение тензоров. Базис в пространстве тензоров типа (p,q) . Координаты тензора, их изменение при замене базиса в основном пространстве. Инвариант. Свертки тензора.
60. Симметрические и кососимметрические тензоры типов $(p,0)$ или $(0,q)$. Симметризация и альтернирование.
61. Тензорная алгебра векторного пространства. Внешнее умножение тензоров. Внешняя алгебра (алгебра Грассмана) n -мерного пространства и ее размерность.
62. Симметрическая алгебра. Размерность пространства симметрических тензоров типа $(0,q)$.
63. Тензоры на евклидовом пространстве.

64. Коммутирующие операторы на конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем.

65. Некоторые группы линейных операторов и матриц: $GL(V)$, $GL(n, F)$ (F – поле), $SL(n, F)$.

66. Группы операторов, сохраняющих невырожденные билинейные формы, и соответствующие группы матриц: ортогональная группа $O(n)$, $SO(n)$. Симплектическая группа. Группа $U(n)$ унитарных матриц порядка n и группа $SU(n)$.

В билете два вопроса.