

**Вопросы к экзамену
по курсу высшей алгебры
3 семестр, 1 поток, 2016/2017 учебный год**

лектор: Бунина Елена Игоревна

1. Порядок элемента группы, порядок степени элемента. Циклические группы, их подгруппы.
2. Смежные группы по подгруппе, теореме Лагранжа, ее следствия. Классификация циклических групп с точностью до изоморфизма
3. Нормальные подгруппы, факторгруппы.
4. Гомоморфизмы групп, нормальность ядра, канонический гомоморфизм на факторгруппу.
5. Первая теорема об изоморфизме (теорема о гомоморфизме).
6. Вторая теорема об изоморфизме.
7. Третья теорема об изоморфизме.
8. Коммутант группы, его нормальность, факторгруппа группы по коммутанту, характеристика коммутанта
9. Группа автоморфизмов группы, подгруппа внутренних автоморфизмов.
10. Критерий циклическости прямой суммы циклических групп. Разложение конечной циклической группы в прямую сумму примарных циклических групп.
11. Условия расщепляемости короткой точной последовательности абелевых групп.
12. Свободная абелева группа, ее ранг, равенство нулю ее периодической части.
13. Свойства свободной абелевой группы (универсальное, накрывающее, расщепляющее).
14. Подгруппы свободных конечно порожденных абелевых групп.
15. Задание конечно порожденных абелевых групп образующими и соотношениями.
16. Целочисленные матрицы, приведение к каноническому диагональному виду.
17. Существование разложения конечно порожденных абелевых групп в прямую сумму циклических групп.

18. Единственность разложения конечно порожденных абелевых групп в сумму свободных циклических и примарных циклических групп.
19. Действие групп на множестве, орбиты и стабилизаторы. Формула орбит.
20. Регулярное действие группы, теорема Кэли.
21. Нетривиальность центра конечной p -группы. Группа из p^2 элементов абелева.
22. Первая теорема Силова.
23. Вторая теорема Силова.
24. Третья теорема Силова.
25. Полупрямые произведения групп.
26. Классификация групп из 12 элементов
27. Простота группы A_n при $n \geq 5$.
28. Простота группы SO_3 .
29. Разрешимые группы, их свойства. Критерий разрешимости группы.
30. Разрешимость группы из p^n элементов, разрешимость группы из pq элементов
31. Разрешимость группы верхних треугольных матриц над полем.
32. Идеалы и гомоморфизмы колец. Факторкольцо по идеалу. Теорема о гомоморфизме для колец.
33. Максимальные идеалы, их существование в кольцах с единицей. Фактор коммутативного кольца с единицей по максимальному идеалу
34. Модули, подмодули, фактормодули, теорема о гомоморфизме для модулей.
35. Кольца главных идеалов (КГИ). Разложение элемента в произведение простых множителей в КГИ, единственность
36. Строение конечно порожденных модулей над кольцом главных идеалов
37. Поле, его характеристика. Присоединение к полю корня неприводимого многочлена.
38. Расширения полей. Конечные и алгебраические расширения. Теорема о башне полей.
39. Поле разложения многочлена (существование и единственность)
40. Строение конечных полей.
41. Цикличность мультипликативной группы конечного поля.
42. Алгебра кватернионов. Конечномерные алгебры с делением и их свойства.
43. Теорема Фробениуса.

44. Представления групп, приводимые, неприводимые и вполне приводимые представления. Эквивалентные представления.

45. Классификация комплексных неприводимых представлений конечной абелевой группы.

46. Одномерные комплексные представления конечных групп.

47. Теорема Машке.

48. Лемма Шура.

49. Следствия из леммы Шура

50. Характеры представлений, их свойства.

51. Соотношения ортогональности для характеров неприводимых комплексных представлений конечной группы.

52. Регулярное представление группы, его характер.

53. Совпадение числа неприводимых комплексных представлений конечной группы с числом ее классов сопряженных элементов.

54. Сумма квадратов размерностей неприводимых комплексных представлений.

55. Неприводимые комплексные представления группы диэдра D_n .

56. Неприводимые комплексные представления группы S_4 .