

▼ Вопросы к экзамену по Линейной алгебре и геометрии

(предварительный вариант)

(лектор: О.В. Куликова, 2020)

1. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Матрица перехода. Изменение координат вектора при переходе от базиса к базису.
2. Изоморфизм пространств одинаковой размерности.
3. Векторные подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Формула Грассмана.
4. Прямая сумма подпространств.
5. Сопряженное пространство и его размерность. Канонический изоморфизм  $V$  и  $V^{**}$ .
6. Пусть даны два базиса  $E$  и  $F$  векторного пространства  $V$ ,  $T$  - матрица перехода от  $E$  к  $F$ . Рассмотрим двойственные базисы  $\bar{E}$  и  $\bar{F}$ . Какова матрица перехода от  $\bar{F}$  к  $\bar{E}$ ?
7. Всякое подпространство есть пересечение ядер некоторого множества линейных функций.
8. Линейные отображения, их задание матрицами. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к другим базисам. Ранг линейного отображения. Размерность ядра и образа.
9. Линейные операторы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Ранг и определитель линейного оператора. Алгебра линейных операторов. Изоморфизм алгебры матриц и алгебры линейных операторов.
10. Инвариантные подпространства. Вид матрицы линейного оператора при наличии инвариантных подпространств. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен.
11. Любой линейный оператор над полем действительных чисел обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.
12. Собственные подпространства. Если  $k$  - кратность собственного значения  $\lambda$  линейного оператора  $A$ , то  $\dim V_\lambda \leq k$ .
13. Линейная независимость системы собственных векторов линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям. Критерий существования базиса из собственных векторов линейного оператора.
14. Пусть  $A: V \rightarrow V$  - линейный оператор в конечномерном векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Тогда существует базис, в котором матрица линейного оператора  $A$  треугольна.
15. Теорема Гамильтона-Кэли.

16. Минимальный многочлен и его свойства.
17. Линейный оператор  $A: V \rightarrow V$  в векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$  диагоназируем тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных корней.
18. Жордановы клетки и матрицы, их характеристические и минимальные многочлены. Жорданов базис.
19. Пусть  $A: V \rightarrow V$  - линейный оператор в векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Тогда в  $V$  имеется жорданов базис для  $A$ .
20. Единственность жордановой нормальной формы.
21. Пусть  $A: V \rightarrow V$  - линейный оператор в векторном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Тогда  $V$  распадается в прямую сумму корневых подпространств, соответствующих всем (различным) собственным значениям оператора  $A$ .
22. Билинейные функции и их матрицы. Изменения матрицы при замене базиса. Ранг билинейной функции. Симметрические билинейные функции. Канонический базис для симметрической билинейной функции.
23. Квадратичные формы и их матрицы. Процедура поляризации. Канонический вид квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа.
24. Нормальной вид квадратичной формы над полем комплексных и действительных чисел. Закон инерции.
25. Формула Якоби. Положительная определенность. Критерий Сильвестра.
26. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами и длина вектора в евклидовом пространстве.
27. Матрица Грама и ее свойства.
28. Линейная независимость системы ненулевых ортогональных векторов. Ортогональный и ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
29. Ортогональные матрицы как матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Группа  $O(n)$ .
30. Ортогональное дополнение.
31. Теорема Пифагора. Угол и расстояние между вектором и подпространством.
32. Изоморфизм векторных пространств  $V$  и  $V^*$  в случае евклидовых пространств.
33. Симметрический (ортогональный) оператор в евклидовом пространстве. Матрица симметрического (ортогонального) оператора в ортонормированном базисе. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно симметрического (ортогонального) линейного оператора.

34. Канонический вид симметрического оператора евклидова пространства.
35. Канонический вид ортогонального оператора евклидова пространства.
36. Приведение квадратичной формы к главным осям в евклидовом пространстве. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов.
37. Полярное разложение невырожденного линейного оператора евклидова пространства.
38. Полуторалинейные функции, эрмитовы квадратичные формы и их свойства.
39. Унитарное пространство. Свойства. Матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Группа  $U(n)$ .
40. Приведение эрмитова и унитарного оператора к каноническому виду в унитарном пространстве.
41. Определение и простейшие свойства аффинных пространств. Примеры. Изоморфизм аффинных пространств одной размерности.
42. Система координат в аффинном пространстве. Формулы перехода от одной системы к другой.
43. Аффинные подпространства (плоскости), их взаимное расположение. Размерность аффинной оболочки двух аффинных подпространств.
44. Задание аффинного подпространства как множества решений системы линейных уравнений.
45. Аффинное отображение. Его матрица, изменение матрицы при переходе к новой системе координат. Действие аффинного преобразования на  $n+1$  точке.
46. Аффинная группа и ее подгруппы.
47. Аффинное евклидово пространство, расстояние между двумя аффинными подпространствами.
48. Движения и аффинные ортогональные операторы.
49. Разложение движения аффинного евклидова пространства в произведение движения с неподвижной точкой и сдвига. Следствия для двумерного и трехмерного аффинного евклидова пространства.
50. Аффинно-квадратичные функции, их матрицы, изменение при замене координат. Условие центральности аффинно-квадратичной функции.
51. Приведение аффинно-квадратичной функции к каноническому виду, к нормальному виду и к главным осям.
52. Аффинные квадратики и их классификация.
53. Полилинейные функции. Изменение коэффициентов полилинейной функции при переходе к другому базису. Определение тензора. Примеры. Размерность пространства тензоров типа  $(p,q)$ .
54. Операция тензорного произведения и его свойства. Тензорная алгебра.
55. Симметрические тензоры. Операция симметрирования.
56. Кососимметрические тензоры. Операция альтернирования.
57. Другие операции над тензорами.