

▼ Вопросы к экзамену по Линейной алгебре и геометрии

(1-й курс 2-й поток, лектор: О.В. Куликова, 2023)

1. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Матрица перехода. Изменение координат вектора при переходе от базиса к базису.
2. Изоморфизм векторных пространств одинаковой размерности.
3. Векторные подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Формула Грассмана.
4. Прямая сумма подпространств.
5. Сопряженное пространство и его размерность. Канонический изоморфизм V и V^{**} .
6. Пусть даны два базиса E и F векторного пространства V , T - матрица перехода от E к F . Рассмотрим двойственные базисы \bar{E} и \bar{F} . Какова матрица перехода от \bar{F} к \bar{E} ?
7. Всякое подпространство есть пересечение ядер некоторого множества линейных функций. Связь с однородными системами линейных уравнений.
8. Линейные отображения, их задание матрицами. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к другим базисам. Ранг линейного отображения. Размерность ядра и образа.
9. Линейные операторы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Ранг и определитель линейного оператора. Алгебра линейных операторов. Изоморфизм алгебры матриц и алгебры линейных операторов.
10. Инвариантные подпространства. Вид матрицы линейного оператора при наличии инвариантных подпространств. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен.
11. Любой линейный оператор над полем действительных чисел обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.
12. Собственные подпространства. Если k - кратность собственного значения λ линейного оператора A , то $\dim V_\lambda \leq k$.
13. Диагонализируемый линейный оператор. Линейная независимость системы собственных векторов линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям. Критерий существования базиса из собственных векторов линейного оператора.
14. Пусть $A: V \rightarrow V$ - линейный оператор в конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем F . Тогда существует базис, в котором матрица линейного оператора A треугольна.
15. Теорема Гамильтона-Кэли.
16. Минимальный многочлен и его свойства.

17. Линейный оператор $A: V \rightarrow V$ в векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем F диагонализуем тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных корней.
18. Жордановы клетки и матрицы, их характеристические и минимальные многочлены. Жорданов базис.
19. Пусть $A: V \rightarrow V$ - линейный оператор в векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем F . Тогда в V имеется жорданов базис для A .
20. Единственность жордановой нормальной формы.
21. Пусть $A: V \rightarrow V$ - линейный оператор в векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем F . Тогда V распадается в прямую сумму корневых подпространств, соответствующих всем (различным) собственным значениям оператора A .
22. Билинейные функции и их матрицы. Изменения матрицы при замене базиса. Ранг билинейной функции. Симметрические билинейные функции. Канонический базис для симметрической билинейной функции.
23. Квадратичные формы и их матрицы. Процедура поляризации. Канонический вид квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа.
24. Нормальный вид квадратичной формы над полем комплексных и действительных чисел. Закон инерции.
25. Формула Якоби. Положительная определенность. Критерий Сильвестра.
26. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами и длина вектора в евклидовом пространстве.
27. Матрица Грама и ее свойства.
28. Линейная независимость системы ненулевых ортогональных векторов. Ортогональный и ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
29. Ортогональные матрицы как матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Множество $O(n)$ ортогональных матриц порядка n образует группу по умножению.
30. Ортогональное дополнение.
31. Теорема Пифагора. Угол и расстояние между вектором и подпространством.
32. Изоморфизм векторных пространств V и V^* в случае евклидовых пространств.
33. Связь между билинейными функциями и линейными операторами в евклидовом пространстве. Линейный оператор, сопряженный к данному. Свойства.
34. Самосопряженный (симметрический) оператор в евклидовом пространстве. Матрица симметрического оператора в ортонормированном базисе. Свойства. Инвариантность

ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно симметрического линейного оператора. Канонический вид симметрического оператора евклидова пространства.

35. Приведение квадратичной формы к главным осям в евклидовом пространстве. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов.

36. Ортогональный оператор в евклидовом пространстве. Матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе. Свойства. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно ортогонального линейного оператора. Канонический вид ортогонального оператора евклидова пространства.

37. Полярное разложение невырожденного линейного оператора евклидова пространства.

38. Полуторалинейные функции, эрмитовы квадратичные формы и их свойства.

39. Унитарное пространство. Свойства. Матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Группа $U(n)$.

40. Приведение эрмитова и унитарного оператора к каноническому виду в унитарном пространстве.

41. Определение и простейшие свойства аффинных пространств. Примеры. Изоморфизм аффинных пространств одной размерности.

42. Система координат в аффинном пространстве. Формулы перехода от одной системы к другой.

43. Аффинные подпространства (плоскости), их взаимное расположение. Размерность аффинной оболочки двух аффинных подпространств.

44. Аффинно-линейные функции. Задание аффинного подпространства как множества решений системы линейных уравнений.

45. Аффинное отображение. Его матрица, изменение матрицы при переходе к новой системе координат. Действие аффинного преобразования на $n+1$ точке.

46. Аффинная группа. Подгруппа сдвигов и подгруппа, оставляющая неподвижной фиксированную точку.

47. Аффинное евклидово пространство. Расстояние между двумя плоскостями.

48. Движения и аффинные ортогональные операторы.

49. Разложение движения аффинного евклидова пространства в произведение движения с неподвижной точкой и сдвига. Следствия для двумерного и трехмерного аффинного евклидова пространства.

50. Аффинно-квадратичные функции. Их матрицы, изменение при замене координат. Центр аффинно-квадратичной функции.

51. Приведение аффинно-квадратичной функции к каноническому виду, к нормальному виду.
52. Аффинно-квадратичные функции в аффинно-евклидовом пространстве. Приведение аффинно-квадратичной функции к главным осям.
53. Аффинные квадратики. Пересечение квадратики и прямой. Центр и вершина квадратики.
54. Квадрики и пропорциональные аффинно-квадратичные функции над бесконечным полем характеристики, отличной от 2.
55. Классификация квадратик. Аффинно-эквивалентные и изометрически-эквивалентные квадратики.
56. Понятие тензора. Тензоры малых рангов. Линейные операции, тензорное произведение. Базис и размерность пространства тензоров типа (p,q) .
57. Изменение координат тензора при переходе к другому базису. Свертка тензора.
58. Симметрические тензоры. Операция симметрирования.
59. Кососимметрические тензоры. Операция альтернирования.
60. Тензорная алгебра. Определение внешней алгебры векторного пространства.