Вопросы к экзамену по линейной алгебре – весна 2024 года.
Лектор И.А. Чубаров.

1. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, размерность. Примеры.
2. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора при замене базиса.
3. Изоморфизм векторных пространств одинаковой размерности.
4. Векторные подпространства, равносильность двух способов их задания. Сумма и пересечение подпространств. Формула Грассмана.
5. Прямая сумма подпространств. Внешняя прямая сумма векторных пространств.
6.Факторпространство, его размерность. Коразмерность. Связь с решениями неоднородной системы линейных уравнений.
7. Линейные функции на векторном пространстве, их ядра. Изменение коэффициентов линейной формы при замене базиса. Сопряженное пространство V*, дуальный базис. Канонический изоморфизм V и V**.
8. Линейные отображения и операторы. Ядро и образ, связь их размерностей. Критерий инъективности.
9. Задание линейных отображений (операторов) матрицами. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к другим базисам. Нахождение ядра и образа при помощи матрицы.
10. Линейные операторы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Подобные матрицы.
11. Векторное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов. Изоморфизм алгебры матриц и алгебры линейных операторов.
12. Инвариантные подпространства линейного оператора. Ограничение линейного оператора на инвариантное подпространство. Вид матрицы линейного оператора при наличии инвариантных подпространств.
13. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейная независимость собственных векторов линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям.
14. Вычисление собственных значений и собственных векторов с помощью матрицы. Характеристический многочлен.
15. Собственные подпространства. Неравенство между размерностью собственного подпространства и кратностью корня характеристического многочлена.
16. Диагонализируемость (матрицы) линейного оператора. Критерии диагонализируемости и достаточное условие.
17. Аннулирующие многочлены линейного оператора (матрицы). Минимальный многочлен.
18. Теорема Гамильтона-Кэли.
19. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для любого линейного оператора над полем действительных чисел.
20. Корневые подпространства. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.
21. Жордановы клетки и матрицы, их характеристические и минимальные многочлены. Критерий диагонализируемости в терминах минимального многочлена.
Жорданов базис.
22. Существование жорданова базиса для нильпотентного оператора (и для матрицы с единственным собственным значением = характеристическим корнем).
23. Существование жордановой нормальной формы матрицы, все характеристические корни которой принадлежат основному полю (в частности, комплексной).
24. Единственность жордановой нормальной формы.
25. Билинейные функции и их матрицы. Изменение матрицы при замене базиса. Ранг билинейной функции. Симметрические билинейные функции.

26. Квадратичные формы и их матрицы. Восстановление симметрической билинейной функции по данной квадратичной функции. Диагональный вид квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа.
27. Нормальный (канонический) вид квадратичной формы над полями действительных и комплексных чисел. Закон инерции.
28. Ортогонализация базиса относительно невырожденной симметрической билинейной формы. Теорема Якоби.
29. Положительно и отрицательно определенные вещественные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
30. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами и длина вектора в евклидовом пространстве. Неравенство треугольника.
31. Вычисление скалярного произведения в координатах. Матрица Грама и ее свойства.
32. Ортогональность векторов. Линейная независимость системы ненулевых ортогональных векторов. Ортогональный и ортонормированный базис. Алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта.
33. Ортогональные матрицы как матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Группа O(n) ортогональных матриц порядка n.
34. Ортогональное дополнение. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и ортогонального дополнения к нему. Ортогональная проекция.
35. Теорема Пифагора. Угол и расстояние между вектором и подпространством. Объем n-мерного параллелепипеда.
36. Изоморфизм евклидовых пространств одинаковой размерности. Изоморфизм евклидова пространства и его сопряженного.
37. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Оператор, сопряженный линейному оператору, его матрица и свойства.
38. Самосопряженный линейный оператор, его свойства и матрица. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов.
39. Ортогональный оператор, его свойства и матрица. Канонический вид матрицы ортогонального оператора.
40. Полярное разложение (матрицы) невырожденного линейного оператора в евклидовом пространстве. Сингулярное разложение.
41. Билинейные и квадратичные функции на евклиловом пространстве. Взаимно однозначное соответствие между (симметрическими) билинейными формами и (самосопряженными) линейными операторами. Приведение квадратичной формы к главным осям. Приведение к диагональному виду пары форм, одна из которых положительно определенна.
42. Полуторалинейные функции и формы. Эрмитовы формы и эрмитовы матрицы. Канонический вид эрмитовой квадратичной формы. Критерий Сильвестра.
43. Унитарное (эрмитово) пространство. Ортогонализация. Ортогональные и ортонормированные базисы. Матрица перехода между ортонормированными базисами. Группа U(n) унитарных матриц порядка n.
44. Самосопряженные (эрмитовы) операторы в унитарном пространстве, их свойства. Теорема о существовании ортонормированного базиса из собственных векторов эрмитова оператора. Приведение эрмитовой квадратичной формы к главным осям.
45. Унитарные операторы в унитарном пространстве, их свойства. Теорема о существовании ортонормированного базиса из собственных векторов унитарного оператора.
46. Аффинное пространство, основные понятия. Аффинизация векторного пространства. Аффинная система координат, изменение координат при замене системы координат.
47. Аффинно независимые системы точек. Барицентрическая комбинация точек. Примеры.
48. Аффинное подпространство (плоскость), его размерность. Геометрический смысл множества решений неоднородной системы линейных уравнений. Задание плоскости системой линейных уравнений.
49. Взаимное расположение двух плоскостей. Пересечение и аффинная оболочка двух аффинных плоскостей. Размерность аффинной оболочки.

50. Аффинное отображение и его линейная часть. Композиция аффинных отображений. Критерий обратимости в терминах линейной части. Матрица аффинного отображения. Существование и единственность аффинного отображения, действующего на систему из (n+1) аффинно независимых точек n-мерного аффинного пространства.
51. Аффинные преобразования. Разложение биективного аффинного преобразования в композицию параллельного переноса и преобразования с неподвижной точкой.
52. Аффинное евклидово пространство. Терема об изоморфизме. Расстояние между двумя плоскостями.
53. Ортогональные аффинные преобразования (движения). Собственные и несобственные движения. Разложение движения в композицию параллельного переноса и ортогонального преобразования с неподвижной точкой.
54. Некоторые аффинные и линейные группы.
55. Аффинно квадратичные функции. Центр. Приведение аффинно квадратичной функции к каноническому виду заменой аффинной системы координат.
56. Поверхности второго порядка (квадрики). Пересечение квадрики с прямой. Центр и вершина квадрики.
57. Квадрики в евклидовом (точечном) пространстве. Ортогональная классификация квадрик. Аффинная классификация.
58. Определение тензора типа (p,q) на векторном пространстве. Линейные операции. Отождествление тензоров малых валентностей с геометрическими объектами.
59. Произведение тензоров. Базис в пространстве тензоров типа (p,q). Координаты тензора, их изменение при замене базиса в основном пространстве. Инвариант. Свертки тензора.
60. Симметрические и кососиммерические тензоры типов (p,0) или (0,q). Симметризация и альтернирование.
61. Тензорная алгебра векторного пространства. Внешняя алгебра и ее размерность.
62. Тензоры на евклидовом пространстве.
63. Коммутирующие операторы на конечномерном комплексном векторном пространстве.
64. Кососимметрические формы. Симплектическая группа.
65*. Псевдоевклидово пространство. Группы Лоренца и Пуанкаре. (См. Кострикин А.И., гл. 4, параграф 4. Группа Пуанкаре – группа аффинных преобразований пространства Минковского, сохраняющих метрику Минковского, линейные части которых составляют группу Лоренца.)

В билете два вопроса.
Вопрос 65 остался со звездочкой, его рассказать не успел. Он не войдет в билеты и не будет спрашиваться на досрочном экзамене.