

▼ Вопросы к экзамену по Линейной алгебре и геометрии

(1-й курс 2-й поток, лектор: О.В. Куликова, 2026)

1. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Матрица перехода. Изменение координат вектора при переходе от базиса к базису. Изоморфизм пространств одинаковой размерности.
2. Векторные подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Формула Грассмана.
3. Прямая сумма подпространств.
4. Сопряженное пространство и его размерность. Канонический изоморфизм  $V$  и  $V^{**}$ .
5. Пусть даны два базиса  $E$  и  $F$  векторного пространства  $V$ ,  $T$  - матрица перехода от  $E$  к  $F$ . Рассмотрим двойственные базисы  $\bar{E}$  и  $\bar{F}$ . Какова матрица перехода от  $\bar{F}$  к  $\bar{E}$ ?
6. Всякое подпространство есть пересечение ядер некоторого множества линейных функций. Связь с однородными системами линейных уравнений.
7. Линейные отображения, их задание матрицами. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к другим базисам. Ранг линейного отображения. Размерность ядра и образа.
8. Линейные операторы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Ранг и определитель линейного оператора. Алгебра линейных операторов. Изоморфизм алгебры матриц и алгебры линейных операторов.
9. Инвариантные подпространства. Вид матрицы линейного оператора при наличии инвариантных подпространств. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен.
10. Любой линейный оператор над полем комплексных чисел обладает одномерным инвариантным подпространством. Любой линейный оператор над полем действительных чисел обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.
11. Собственные подпространства. Если  $k$  - кратность собственного значения  $\lambda$  линейного оператора  $A$ , то  $\dim V_\lambda \leq k$ .
12. Линейная независимость системы собственных векторов линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям. Критерий существования базиса из собственных векторов линейного оператора.
13. Пусть  $A: V \rightarrow V$  - линейный оператор конечномерного векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Тогда существует базис, в котором матрица линейного оператора  $A$  треугольна.
14. Теорема Гамильтона-Кэли.
15. Минимальный многочлен и его свойства.

16. Жордановы клетки и матрицы, их характеристические и минимальные многочлены. Жорданов базис.
17. Пусть  $A: V \rightarrow V$  - линейный оператор векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Тогда в  $V$  имеется жорданов базис для  $A$ .
18. Единственность жордановой нормальной формы.
19. Линейный оператор  $A: V \rightarrow V$  векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$  диагонализуем тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных корней.
20. Пусть  $A: V \rightarrow V$  - линейный оператор векторного пространства  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $F$ . Тогда  $V$  распадается в прямую сумму корневых подпространств, соответствующих всем (различным) собственным значениям оператора  $A$ .
21. Билинейные функции и их матрицы. Изменения матрицы при замене базиса. Ранг билинейной функции. Симметрические билинейные функции. Канонический вид для симметрической билинейной функции.
22. Квадратичные функции и их матрицы. Процедура поляризации. Канонический вид квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа.
23. Нормальной вид квадратичной формы над полем комплексных и действительных чисел. Закон инерции.
24. Формула Якоби. Положительная и отрицательная определенность. Критерий Сильвестра.
25. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между ненулевыми векторами и длина вектора в евклидовом пространстве.
26. Матрица Грама и ее свойства.
27. Линейная независимость системы ненулевых ортогональных векторов. Ортогональный и ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Изоморфизм евклидовых пространств.
28. Ортогональные матрицы как матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Множество  $O(n)$  ортогональных матриц порядка  $n$  образует группу по умножению.
29. Ортогональное дополнение.
30. Теорема Пифагора. Угол и расстояние между вектором и подпространством.
31. Изоморфизм векторных пространств  $V$  и  $V^*$  в случае евклидовых пространств.
32. Связь между билинейными функциями и линейными операторами в евклидовом пространстве. Линейный оператор, сопряженный к данному. Свойства.

33. Самосопряженный (симметрический) оператор в евклидовом пространстве. Матрица симметрического оператора в ортонормированном базисе. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно симметрического линейного оператора. Канонический вид симметрического оператора евклидова пространства. Следствия.
34. Приведение квадратичной функции к главным осям в евклидовом пространстве. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов.
35. Ортогональный оператор в евклидовом пространстве. Свойства. Матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе. Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно ортогонального линейного оператора. Канонический вид ортогонального оператора евклидова пространства.
36. Полярное разложение невырожденного линейного оператора евклидова пространства.
37. Полуторалинейные функции, эрмитовы квадратичные формы и их свойства.
38. Унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника в унитарном пространстве. Ортонормированный базис, матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому в унитарном пространстве. Группа  $U(n)$ .
39. Приведение эрмитова и унитарного оператора к каноническому виду в унитарном пространстве.
40. Определение и простейшие свойства аффинных пространств. Примеры. Изоморфизм аффинных пространств одной размерности.
41. Система координат в аффинном пространстве. Формулы перехода от одной системы к другой.
42. Аффинные подпространства (плоскости), их взаимное расположение. Размерность аффинной оболочки двух аффинных подпространств.
43. Аффинно-линейные функции. Задание аффинного подпространства как множества решений системы линейных уравнений.
44. Аффинные отображения. Композиция аффинных отображений. Матрица аффинного отображения, изменение матрицы при переходе к новой системе координат. Аффинные операторы. Существование невырожденного аффинного оператора в  $n$ -мерном аффинном пространстве, переводящего заданные  $n+1$  аффинно независимую точку в  $n+1$  аффинно независимую точку.
45. Аффинная группа. Подгруппа сдвигов и подгруппа, оставляющая неподвижной фиксированную точку. Разложение аффинной группы.
46. Аффинное евклидово пространство. Расстояние между двумя плоскостями.
47. Движения и аффинные ортогональные операторы.

48. Разложение движения аффинного евклидова пространства в произведение движения с неподвижной точкой и сдвига. Следствия для двумерного и трехмерного аффинного евклидова пространства.
49. Аффинно-квадратичные функции. Их матрицы, изменение при замене координат. Центр аффинно-квадратичной функции.
50. Приведение аффинно-квадратичной функции к каноническому виду, к нормальному виду.
51. Аффинно-квадратичные функции в аффинно-евклидовом пространстве. Приведение аффинно-квадратичной функции к главным осям.
52. Аффинные квадратики. Пересечение квадратики и прямой. Центр и вершина квадратики.
53. Квадрики и пропорциональные аффинно-квадратичные функции над бесконечным полем характеристики, отличной от 2.
54. Классификация квадратик. Аффинно-эквивалентные и изометрически-эквивалентные квадратики.
55. Понятие тензора. Тензоры малых рангов. Линейные операции, тензорное произведение. Базис и размерность пространства тензоров типа  $(p,q)$ .
56. Изменение координат тензора при переходе к другому базису. Свертка тензора.
57. Симметрические тензоры. Операция симметрирования.
58. Кососимметрические тензоры. Операция альтернирования.
59. Тензорная алгебра. Внешняя алгебра векторного пространства. Определение.