

## Представления 2

**Задача 1.** Докажите, что для каждого представления группы  $G$   $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  можно выбрать базис в  $V$  так, чтобы все матрицы операторов представления имели блочно верхнетреугольный вид:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \rho_2 & * & \dots & * \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \rho_k \end{pmatrix},$$

где  $\rho_i$  – неприводимые представления.

**Задача 2.** Зададим  $n$ -мерное представление  $\rho$  группы  $S_n$  по формуле  $\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$ . Разложите его в прямую сумму неприводимых.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  – конечная группа. Тогда у группы  $G$  есть только конечное число неизоморфных неприводимых представлений. Обозначим размерности комплексных неприводимых представлений  $n_1, \dots, n_k$ . Тогда  $n_1^2 + \dots + n_k^2 = |G|$ .

(не доказывалось на лекциях)  $n_i \mid |G|$ .

**Задача 3.** Могут ли комплексные неприводимые представления группы исчерпываться

- а) Тремя одномерными и четырьмя двумерными?
- б) Двумя одномерными и двумя пятимерными?
- в) Пятью одномерными и одним пятимерным?

**Задача 4.** Найдите число и размерности неприводимых комплексных представлений группы

- а)  $S_3$ , б)  $A_4$ , в)  $S_4$ , г)  $Q_8$ , д)  $D_n$ , е)  $A_5$ .

**Задача 5.** Используя то, что  $S_3$  изоморфна группе симметрий правильного треугольника опишите все комплексные неприводимые представления  $S_3$ .

**Задача 6.** Докажите, что группа вращений куба изоморфна  $S_4$ .

**Задача 7.** Опишите все неприводимые представления группы

- а)  $S_4$
- б)  $A_4$

**Определение 1.** Пусть  $G$  – группа. Пусть  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  и  $\psi: G \rightarrow \text{GL}(W)$  – два представления. Тогда отображение  $\rho \otimes \psi: G \rightarrow V \otimes W$ ,  $(\rho \otimes \psi)(g)(v \otimes w) = (\rho(g)(v) \otimes \psi(g)(w))$  называется тензорным произведением представлений.

**Задача 8.** а) Докажите, что тензорное произведение представлений – представление.

б) Пусть  $\rho$  – неприводимое представление, а  $\psi$  – одномерное представление. Докажите, что  $\rho \otimes \psi$  – неприводимое представление.

в) Пусть  $\rho$  и  $\psi$  неприводимые представления. Приведите пример того, что представление  $\rho \otimes \psi$  приводимо.

**Задача 9.** Пусть  $\rho_1, \dots, \rho_k$  – все неизоморфные неприводимые представления группы  $G$ . Пусть  $H$  – конечная абелева группа. Опишите все неизоморфные неприводимые представления группы  $G \times H$ .

**Задача 10.** Найти число неизоморфных 5-мерных представлений группы  $\mathbb{Z}_4 \times D_6$ .