Теоремы Силова

Определение 1. Пусть G – конечная группа, $|G| = p^k m$, где $(p, m) = 1$. Пусть H – подгруппа и $|H| = p^k$. Тогда H – силовская p-подгруппа в G.

Теорема 1. *1) Для любой группы G и любого p делящего $|G|$ есть силовская p-подгруппа в G.*

2) Любая подгруппа в G из p^l элементов содержится в силовской. Все силовские подгруппы сопряжены.

3) Количество силовких p-подгрупп сравнимо с 1 по модулю p.

Задача 1. Докажите, что если для данного p силовская p-подгруппа единственна, то она нормальна.

Задача 2. Докажите, что количество силовских p-подгрупп делит m.

Задача 3. Докажите разрешимость всех групп порядка

а) 20

б) 12

в) $p^2 q$

г) 42

Задача 4. Докажите коммутативность групп порядка

а) 15

б) 35

в) 185

г) 255

Задача 5. Сколько различных силовских p-подгрупп в группе S_p, где p – простое?

Задача 6. Сколько различных силовских 2,3 и 5-силовских подгрупп в группе A_5?

Задача 7. а) Найти порядок групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_q)$ и $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_q)$.

б) Сколько силовских 2-подгрупп в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$? Докажите, что они изоморфны Q_8.

Задача 8. Докажите, что силовская 2-подгруппа в S_4 изоморфна D_4.

Теорема 2. *Пусть G – конечная группа, действующая на множестве X. Тогда $|G| = |Gx||St(x)|$ для каждого $x \in X$.*

Задача 9. а) Найти порядок группы симметрий куба.

б) Найти порядок группы вращений куба.

Задача 10. Докажите, что группа вращений куба действует транзитивно на множестве диагоналей. Чему равен порядок стабилизатора одной диагонали. Докажите, что группа вращений куба изоморфна S_4.