

КОММУТАНТ

Определение 1. Пусть x и y – два элемента группы G . Коммутатор этих элементов – это элемент $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Определение 2. Коммутатор – это подгруппа, порожденная коммутаторами. Коммутант группы G обозначается G' или $[G, G]$.

Задача 1. Докажите, что G' – это нормальная подгруппа, фактор по которой абелева. Причём G' – минимальная подгруппа с таким свойством.

Задача 2. Найти коммутанты групп S_3, A_4, S_4, Q_8 .

Задача 3. Докажите, что коммутант группы $GL_n(\mathbb{C})$ равен $SL_n(\mathbb{C})$.

Задача 4. Найдите коммутант группы D_n .

Задача 5. Найдите коммутант группы невырожденных вещественных верхнетреугольных матриц $n \times n$.

Определение 3. *Ряд коммутантов* группы G – это ряд вложенных подгрупп

$$G = G^{(0)} \supset G' = G^{(1)} \supset G'' = G^{(2)} \supset \dots$$

Если существует натуральное число n такое, что $G^{(n)} = \{e\}$, то группа G называется *разрешимой*.

Задача 6. Докажите, что $G^{(i)}$ – нормальная подгруппа в G .

Задача 7. Докажите, что

- а) всякая подгруппа разрешимой группы разрешима;
- б) всякая факторгруппа разрешимой группы разрешима;
- в) если G и H – разрешимые группы, то $G \times H$ – разрешимая группа;
- г) если $G/H \cong N$ и группы H и N разрешимы, то G разрешима.

Задача 8. Докажите, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда существует ряд вложенных подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots$$

таких, что H_{i+1} нормальна в H_i и H_{i+1}/H_i – циклическая группа простого порядка.

Задача 9. Докажите, что группа невырожденных вещественных верхнетреугольных матриц $n \times n$ разрешима.