Циклические группы, автоморфизмы.

Определение 1. Пусть $G_1, \dots, G_k$ – группы (полугруппы, моноиды). *Прямое произведение* групп (полугрупп, моноидов) $G_1, \dots, G_k$ – это множество $\{(g_1, \dots, g_k)\} \mid g_i \in G_i$ с операцией $(g_1, \dots, g_k) \cdot (h_1, \dots, h_k) = (g_1 \cdot h_1, \dots, g_k \cdot h_k)$.

Задача 1. Доказать, что прямое произведение групп (полугрупп, моноидов) является группой (полугруппой, моноидом). Сколько элементов в прямом произведении?

Определение 2. Группа G называется *циклической*, если существует такой элемент $g \in G$, что $G = \{e, g, g^{-1}, g^2, g^{-2}, \dots\}$.

Теорема 1. *Циклическая группа изоморфна либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}_n$ для некоторого натурального n.*

Задача 2. а) Докажите, что подгруппа циклической группы циклическая.
б) Опишите все подгруппы в $\mathbb{Z}$ и в $\mathbb{Z}_n$.

Задача 3. а) Пусть $G = \langle g \rangle_n$. Какой порядок у элемента g^m?
б) Сколько элементов порядка k в циклической группе порядка n?

Определение 3. Отображение $\varphi\colon G \to G$ называется *эндоморфизмом*, если φ - это гомоморфизм из G в G.
Автоморфизм - это биективный гомоморфизм. То есть автоморфизм - это изоморфизм из G в G.

Задача 4. Какие алгебраические структуры образуют множества эндоморфизмов и автоморфизмов группы G с операцией композиции?

Задача 5. Опишите все эндоморфизмы и автоморфизмы группы $\mathbb{Z}$. Как устроена их композиция?

Задача 6. а) Сколько существует различных гомоморфизмов из $\mathbb{Z}_3$ в $\mathbb{Z}_4$?
б) Сколько существует различных гомоморфизмов из $\mathbb{Z}_{15}$ в $\mathbb{Z}_{12}$?

Задача 7. Опишите группу автоморфизмов группы $\mathbb{Z}_n$.

Задача 8. Найдите все изоморфизмы между $\mathbb{Z}_5^\times$ и $\mathbb{Z}_4$.

Задача 9. * При каких n группа $\mathbb{Z}_n^\times$ является циклической?

Задача 10. Чему изоморфна группа $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_9)))$?

Задача 11. Опишите группу автоморфизмов группы
а) S_3
б) V_4
в) D_4
г) Q_8

Задача 12. а) Пусть H - подгруппа группы G. Обозначим через $\mathrm{Aut}_H G$ множество автоморфизмов G, оставляющих все элементы H на месте. Какую алгебраическую структуру образует множество $\mathrm{Aut}_H G$ с операцией композиции.
б) Опишите $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{C}^\times$.
в) Опишите $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Задача 13. Пусть G – конечная группа. Пусть $d(G)$ – наименьшее натуральное число s такое, что $g^s = e$ для всех $g \in G$.

а) Докажите, что период группы равен наименьшему общему кратному порядков всех элементов G.

б) Если группа G коммутативна, то существует элемент порядка $d(G)$.

в) Группа G циклическая тогда и только тогда, когда $d(G) = |G|$.

Задача 14. а) Пусть a – фиксированный элемент группы G. Докажите, что отображение $\sigma_a \colon G \to G$, $\sigma_a(g) = aga^{-1}$ является автоморфизмом группы G.

б) Докажите, что множество $\mathrm{Int}(G)$ внутренних автоморфизмов является подгруппой в группе автоморфизмов G.

Задача 15. * а) Докажите, что при $n \neq 6$, $\mathrm{Int}(S_n) = \mathrm{Aut}(S_n)$.

б) Найдите внешний (не внутренний) автоморфизм S_6.

Задача 16. * Докажите, что группа из 6 элементов либо циклическая, либо изоморфна S_3.

Задача 17. * Приведите пример двух неизоморфных конечных групп, между которыми существует биекция, сохраняющая порядки элементов.