Теорема о гомоморфизме. Действие группы.

Теорема 1. *(Теорема о гомоморфизме.) Пусть G и H – группы. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon G \to H$. Тогда $\mathrm{Ker}\varphi$ является нормальной подгруппой в G, а $\mathrm{Im}\,\varphi$ – подгруппой в H, причем $G/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi$.*

Задача 1. *Найдите с помощью теоремы о гомоморфизме факторгруппу $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.*

Задача 2. *а) Докажите, что подгруппа $\mathrm{Int}(G)$ внутренних автоморфизмов группы G нормальна в группе $\mathrm{Aut}(G)$ всех автоморфизмов группы G.*

б) Докажите, что $Z(G)$ – нормальная подгруппа в группе G и

$$G/Z(G) \cong \mathrm{Int}(G).$$

Задача 3. *Пусть U – множество комплексных чисел с модулем 1; H_n – множество комплексных чисел с аргументами $\frac{2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$; $U_n = U \cap H_k$. Докажите, что*

а) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$;
б) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times \cong U$;
в) $\mathbb{C}^\times/U \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$;
г) $U/U_n \cong U$;
д) $\mathbb{C}^\times/U_n \cong \mathbb{C}^\times$;
е) $\mathbb{C}^\times/H_n \cong U$;
ж) $H_n/(\mathbb{R}_+, \cdot) \cong U_n$;
з) $H_n/U_n \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Задача 4. ** Докажите, что $\mathrm{S}_4/\mathrm{V}_4 \cong \mathrm{S}_3$.*

Определение 1. Действием группы G на множестве X называется отображение $\alpha\colon G \times X \to X$ со свойствами:

1) $\alpha(e, x) = x$;
2) $\alpha(h, \alpha(g, x)) = \alpha(hg, x)$.

Обозначение $\alpha(g, x) = g \cdot x$.

Определение 2. Орбита элемента x при действии группы G – это множество $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$.

Стабилизатор элемента x – это $G_x = \mathrm{St}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Задача 5. *Докажите, что G_x – подгруппа в G.*

Задача 6. *Пусть $G_x = H$. Каков стабилизатор $y = g \cdot x$?*

Задача 7. *Пусть G – группа операторов, действующая на n-мерном пространстве. Найти орбиты, выбрать представители и найти их стабилизаторы, если*

а) $G = \mathrm{GL}_n$;
б) $G = \mathrm{O}_n$ – группа ортогональных матриц;
в) группа невырожденных диагональных матриц;
г) группа невырожденных верхнетреугольных матриц..

Задача 8. *Пусть $G = \mathrm{GL}_n$ действует на множестве k-мерных подпространств в n-мерном пространстве. Найти орбиты.*

Задача 9. *Пусть F – множество цепочек $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$, где $\dim(V_i) = i$. Найти орбиты действия GL_n на F, выбрать представители и найти стабилизаторы.*

Задача 10. *Описать орбиты* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *на множестве комплексных матриц* $n \times n$ *сопряжениями.*

Определение 3. Классы сопряженности – это орбиты при действии группы на себе сопряжениями.

Задача 11. *Описать классы сопряженности и все нормальные подгруппы в*

а) S_4*;*
б) A_4*;*
в) Q_8*;*
г) D_6.

Задача 12. *Пусть* G *– группа аффинных преобразований* n*-мерного вещественного пространства. Рассмотрим действие* $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$ *на множестве квадратичных функций. Докажите, что это действие и найдите орбиты.*