Прямые произведения. Конечнопорожденные абелевы группы.

Задача 1. *Разлагаются ли в прямое произведение своих подгрупп группы*
а) $\mathbb{Z}$,
б) S_3,
в) A_4,
г) Q_8*?*

Задача 2. *Докажите, что если в абелевой группе подгруппы* $A_1, \ldots, A_k$ *имеют конечные взаимно простые порядки, то их сумма является прямой.*

Теорема 1. *(Теорема о факторизации по сомножителям.) Пусть* $G_1, \ldots, G_n$ *– группы и* $H_1, \ldots, H_n$ *– их нормальные подгруппы. Тогда* $H_1 \times \ldots \times H_n$ *– нормальная подгруппа группы* $G_1 \times \ldots \times G_n$ *и*

$$(G_1 \times \ldots \times G_n)/(H_1 \times \ldots \times H_n) \cong G_1/H_1 \times \ldots \times G_n/H_n.$$

Задача 3. *Пусть* A *– свободная абелева группа с базисом* $\{x_1, x_2, x_3\}$, B *– ее подгруппа с базисом* $\{y_1, y_2, y_3\}$. *Найти, чему изоморфна группа* A/B, *если*
а)

$$\begin{cases} y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3; \\ y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3; \\ y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3; \\ y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3; \\ y_3 = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3. \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3; \\ y_2 = 8x_1 + 9x_2 + 1x_3; \\ y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

г)

$$\begin{cases} y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3; \\ y_2 = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3; \\ y_3 = 5x_1 + 4x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

Задача 4. *В факторгруппе свободной абелевой группы* A *с базисом* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *по подгруппе* B, *порожденной элементами* $x_1 + x_2 + 4x_3$ *и* $2x_1 - x_2 + 2x_3$, *найти порядок смежного класса* $(x_1 + 2x_3) + B$.

Задача 5. *В факторгруппе свободной абелевой группы* A *с базисом* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *по подгруппе* B, *порожденной элементами* $2x_1 + x_2 - 50x_3$ *и* $4x_1 + 5x_2 + 60x_3$, *найти порядок элемента* $(32x_1 + 31x_2) + B$.

Задача 6. *Найти* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2)$.

Задача 7. *Докажите, что* $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{mn}$ *тогда и только тогда, когда НОД*$(m, n) = 1$.

Задача 8. *а) Докажите, что подгруппа в конечно порожденной абелевой группе конечно порождена.*

б) Верно ли это утверждение для абелевых моноидов?

в) Верно ли это утверждение для неабелевых групп?

Теорема 2. *Конечно порожденная абелева группа изоморфна конечной прямой сумме свободных циклических групп (изоморфных $\mathbb{Z}$) и конечных примарных циклических групп (изоморфных $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ для некоторого простого p). Причем такое разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых.*

Задача 9. *а) Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$?*

б) Разбить на классы изоморфных групп $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{50}$, $\mathbb{Z}_{3600}$, $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{40}$, $\mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{30}$

Задача 10. *а) Перечислить с точностью до изоморфизма все абелевы группы порядка 200.*

б) Сколько с точностью до изоморфизма абелевых групп порядка n? (Не совсем хороший ответ. То есть не в элементарных функциях.)

Задача 11. *Найти разложение на примарные циклические группы $(\langle a\rangle_9 \oplus \langle b\rangle_{27}/\langle 3a + 9b\rangle$.*

Задача 12. *Изоморфны ли группы*

$$(\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_4)/\langle 2b\rangle \qquad \text{и} \qquad (\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_4)/\langle a + 2b\rangle?$$

Задача 13. *Сколько элементов порядка*

а) 2, 4 и 6 в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$?

б) 2, 4 и 5 в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$?

Задача 14. *Есть ли в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$ подгруппа, изоморфная*

а) $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$,

б) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$?