Действие группы.

Определение 1. Действием группы G на множестве X называется отображение $\alpha\colon G \times X \to X$ со свойствами:

1) $\alpha(e, x) = x$;

2) $\alpha(h, \alpha(g, x)) = \alpha(hg, x)$.

Обозначение $\alpha(g, x) = g \cdot x$.

Определение 2. Орбита элемента x при действии группы G – это множество $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$.

Стабилизатор элемента x – это $G_x = \mathrm{St}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Задача 1. *Докажите, что G_x – подгруппа в G.*

Задача 2. *Пусть $G_x = H$. Каков стабилизатор $y = g \cdot x$?*

Задача 3. *Пусть G – группа операторов, действующая на n-мерном пространстве. Найти орбиты, выбрать представители и найти их стабилизаторы, если*

а) $G = \mathrm{GL}_n$;

б) $G = \mathrm{O}_n$ – группа ортогональных матриц;

в) группа невырожденных диагональных матриц;

г) группа невырожденных верхнетреугольных матриц..

Задача 4. *Пусть $G = \mathrm{GL}_n$ действует на множестве k-мерных подпространств в n-мерном пространстве. Найти орбиты.*

Задача 5. *Пусть F – множество цепочек $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$, где $\dim(V_i) = i$. Найти орбиты действия GL_n на F, выбрать представители и найти стабилизаторы.*

Задача 6. *Описать орбиты $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ на множестве комплексных матриц $n \times n$ сопряжениями.*

Определение 3. Классы сопряженности – это орбиты при действии группы на себе сопряжениями.

Задача 7. *Описать классы сопряженности и все нормальные подгруппы в*

а) S_4;

б) A_4;

в) Q_8;

г) D_6.

Задача 8. *Пусть $G = \mathrm{GL}(\mathbb{R})$ – группа невырожденных линейных преобразований n-мерного вещественного пространства. Рассмотрим действие*

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

на множестве квадратичных функций. Докажите, что это действие и найдите орбиты.

Теорема 1. *Пусть на множестве X действует конечная группа G. Тогда для любого $x \in X$ выполнено:*

$$|Gx| \cdot |St(x)| = |G|.$$

Задача 9. *Сколько элементов в группе симметрий*

а) куба,

б) икосаэдра?

Задача 10. *Можно ли перевести правильный додекаэдр в себя путем вращения вокруг какой-либо оси на* $\frac{2\pi}{7}$ *?*

Теорема 2. *(Лемма Бернсайда) Пусть на множестве* X *действует конечная группа* G*. Обозначим*

$$X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Тогда количество орбит равно

$$X/G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} X^g.$$

Задача 11. *Бусы состоят из 3-х ччрных и 4-х белых бусин на круглой нитке. Бусины можно двигать по нитке (не меняя порядок) и можно переворачивать всю нитку. Сколько существует видов бус, не переводящихся друг в друга такими операциями?*

Задача 12. *а) Сколько существует различных способов покрасить грани куба в 2 цвета?*

б) Тот же вопрос про вершины.