

ЛЕКЦИЯ 1

Определение 1. Пусть G – некоторое множество. n -арной операцией на множестве G называется отображение

$$G \times \dots \times G \rightarrow G$$

из n -ой декартовой степени множества G в множество G .

Рассмотрим бинарную операцию $*$ на множестве G :

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g_1, g_2) \rightarrow g_1 * g_2.$$

Определение 2. Непустое множество G с фиксированной бинарной операцией $*$ называется *группоидом*.

Рассмотрим следующие условия (аксиомы) на операцию $*$.

A1. Ассоциативность. Для любых элементов $a, b, c \in G$ выполнено $(a*b)*c = a*(b*c)$.

A2. Существование нейтрального элемента. Существует такой элемент $e \in G$, что для любого $g \in G$ выполняется $eg = ge = g$.

A3. Существование обратного элемента. Для каждого элемента $g \in G$ существует элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

A4. Коммутативность. Для любых элементов $a, b \in G$ выполнено $a * b = b * a$.

Накладывая на операцию $*$ различные множества условий, мы будем получать различные алгебраические структуры.

Определение 3. Если $*$ удовлетворяет условию A1, то G называется *полугруппой*.

Если $*$ удовлетворяет условиям A1 и A2, то G называется *моноидом*.

Если $*$ удовлетворяет условиям A1 и A2 и A3, то G называется *группой*.

Условие A4 добавляет к названию структуры слово абелев (или, что то же самое, коммутативный). Так условия A1 и A4 задают *абелеву (коммутативную) полугруппу*, условия A1, A2 и A4 задают *абелев (коммутативный) моноид*, условия A1, A2, A3 и A4 задают *абелеву (коммутативную) группу*.

Обозначение 1. Если не очевидно, какая операция на множестве G имеется в виду, то будем использовать обозначение $(G, *)$ для множества G с операцией $*$.

Упражнение 1. Рассмотрим аксиому, являющуюся "половиной" аксиомы A2.

A2': Существует такой элемент $e \in G$, что для любого $g \in G$ выполняется $eg = g$. Докажите, что если структура $(G, *)$ удовлетворяет условиям A1, A2' и A3, то G является группой.

Задача 1. Рассмотрим аксиому, являющуюся "половиной" аксиомы A3.

A3': Для каждого элемента $g \in G$ существует элемент $g^{\vee} \in G$ такой, что $g * g^{\vee} = e$.

Существует ли структура $(G, *)$, удовлетворяющая условиям A1, A2 и A3', но не являющаяся группой.

Рассмотрим некоторые элементарные следствия из аксиом.

Лемма 1. Простые следствия из аксиом.

1) (Обобщенная ассоциативность) Пусть $(G, *)$ – полугруппа. И пусть $g_1, \dots, g_k \in G$. Тогда как бы ни были расставлены скобки в выражении $g_1 * g_2 * \dots * g_k$ результат будет одинаковым.

2) В моноиде есть единственная единица.

3) В группе для каждого элемента есть единственный обратный.

4) Пусть $(G, *)$ – группа. Пусть $a, b \in G$. Тогда если $a * b = e$, то $b = a^{-1}$. Аналогично если $b * a = e$, то $b = a^{-1}$.

5) Пусть $(G, *)$ – группа, $a, b \in G$. Тогда $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

6) Пусть $(G, *)$ – группа, $g \in G$. Тогда $(g^{-1})^{-1} = g$.

Доказательство. 1) Докажем это утверждение индукцией по k .

База индукции $k = 3$. В этом случае обобщенная ассоциативность совпадает с ассоциативностью, то есть с аксиомой A1.

Шаг индукции. Предположим, что для $k < n$ данное утверждение уже доказано. Докажем его для $k = n$. Среди всех расстановок скобок есть стандартная (при ней действия выполняются справа-налево):

$$(\dots (g_1 * g_2) * g_3) * \dots * g_{n-1} * g_n = g.$$

Достаточно доказать, что результат, который получается при произвольной расстановке скобок, совпадает с g . Фиксируем некоторую расстановку скобок. Для этой расстановки скобок есть последнее действие, которое даст операцию от двух скобок. Длинной скобки назовем количество g_i , входящих в нее. Докажем, что результат совпадает с g индукцией по длине правой скобки (обозначим эту длину s).

База второй индукции $s = 1$. Наша расстановка скобок имеет вид $(\dots) * g_n$. По предположению первой индукции в левой скобке можно расставить скобки произвольным образом. В том числе стандартным образом. Но тогда в целом мы получим стандартную расстановку скобок. Значит, результат при нашей расстановке скобок совпадает с результатом при стандартной расстановке скобок.

Шаг второй индукции. Пусть при $s < t$ утверждение доказано ($m \geq 2$). Докажем при $s = t$. Последнее действие при нашей фиксированной расстановке скобок имеет вид $(a) * (b)$. Поскольку длина скобки (b) равна $m \geq 2$, то $b = (c) * (d)$. Тогда $(a) * (b) = (a) * ((c) * (d))$. Применяя аксиому A1, получаем

$$(a) * ((c) * (d)) = ((a) * (c)) * (d).$$

Но длина скобки (d) строго меньше, чем длина скобки $(b) = ((c) * (d))$. Значит, по предположению второй индукции результат получающийся при расстановке скобок $((a) * (c)) * (d)$ совпадает с g .

2) Предположим, что в моноиде $(G, *)$ есть две единицы: e и s . Рассмотрим $e * s$. Поскольку e – единица, получаем $e * s = s$. С другой стороны так как s – единица, то $e * s = e$. Таким образом, $e = s$.

3) Пусть $(G, *)$ – группа. Предположим, что $g \in G$ – элемент, у которого есть хотя бы два обратных: f и h . Тогда $f = f * (g * h) = (f * g) * h = h$.

4) Пусть $a * b = e$. Рассмотрим операцию элемента a^{-1} и левой части и приравняем к операции элемента a^{-1} и правой части. (Домножим на a^{-1} слева.) Получим $a^{-1} * a * b = a^{-1} * e$. То есть $b = a^{-1}$.

Если $b * a = e$, то аналогично домножая слева на a^{-1} , получаем $b = a^{-1}$.

5) Обозначим $b^{-1} * a^{-1} = c$. Рассмотрим $(a * b) * c = (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = e$. Значит, $c = (a * b)^{-1}$.

6) $g^{-1} * g = e$, значит $g = (g^{-1})^{-1}$. □

Определение 4. Подмножество H группы $(G, *)$ называется *подгруппой*, если $(H, *)$ является группой.

Подмножество S группы $(G, *)$ называется *замкнутым относительно операции $*$* , если для любых $a, b \in S$ выполнено $a * b \in S$. Подмножество S группы $(G, *)$ называется

замкнутым относительно взятия обратного, если для любого $s \in S$ элемент s^{-1} также принадлежит S .

Предложение 1. *Непустое подмножество H группы $(G, *)$ является подгруппой тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно операции и замкнуто относительно взятия обратного.*

Доказательство. Если $(H, *)$ – группа, то операция $*$ корректно определена на H . Значит, H замкнуто относительно операции $*$. Пусть e – нейтральный элемент группы G , а s – нейтральный элемент группы H . Получаем $s*s = s$. В группе G есть обратный к s элемент s^{-1} . Умножая на него слева предыдущее равенство, получаем $s = e$. То есть единицы у групп G и H совпадают. Для каждого $g \in H$ есть обратный элемент g^{-1} в группе G и есть обратный элемент $g^\vee$ в группе H . Тогда $g * g^{-1} = e = g * g^\vee$. Умножив слева на g^{-1} , получаем $g^{-1} = g^\vee$. Поскольку для группы $(H, *)$ выполнена аксиома A3, то H замкнуто относительно взятия обратного.

Пусть теперь подмножество H замкнуто относительно операции и взятия обратного. Так как H замкнуто относительно операции, $(H, *)$ – группоид. Поскольку ассоциативность выполнена в G , то она выполнена и в H . Подмножество не пусто. Возьмем элемент $h \in H$. Так как H замкнуто относительно взятия обратного, $h^{-1} \in H$. Пользуясь замкнутостью H относительно операции, получаем $h * h^{-1} = e \in H$. Таким образом, в H выполнена аксиома A2. Поскольку H замкнуто относительно взятия обратного, в H выполнена и аксиома A3. $\square$

Зачастую вместо слова "операция" используют слово "умножение". Суть от этого не меняется и имеется в виду некоторая операция в группе. При этом на письме так же как и в случае обычного умножения чисел знак умножения можно опускать. Нейтральный элемент группы в этом случае зачастую называют "единицей группы". Такие обозначения называются *мультипликативными*.

Если заранее известно, что группа абелева, то часто используют *аддитивные* обозначения. Операция называется сложением и обозначается знаком $+$ нейтральный элемент называется нулем, а обратный элемент называется "противоположным элементом".

Соберем эти обозначения в таблице.

общие обозначения	мультипликативные обозначения	аддитивные обозначения
произвольная группа	произвольная группа	абелева группа
операция $*$	умножение $\cdot$	сложение $+$
нейтральный элемент e	единица e	ноль 0
обратный элемент g^{-1}	обратный элемент g^{-1}	противоположный элемент $-g$

Определение 5. Порядок группы G – это количество элементов в этой группе. (То есть мощность множества G .) Порядок группы G обозначается $|G|$.

Определение 6. Пусть g – элемент группы G , а n – целое число. Определим n -ю степень элемента g следующим образом. Если n положительное, то $g^n = g \cdot \dots \cdot g$ – произведение n элементов g . Если n отрицательное, то $g^n = (g^{-1})^n$. Нулевая степень любого элемента равна нейтральному элементу e .

Упражнение 2. Выполнены следующие свойства степеней элемента группы:

- 1) $g^m g^n = g^{m+n}$,
- 2) $(g^m)^n = g^{mn}$

Указание. Рассмотреть все случаи знаков m и n .

Определение 7. Пусть g – элемент группы G . Порядок g – это минимальное натуральное число n такое, что $g^n = e$. Если такого числа не существует, то порядок элемента g равен бесконечности. Порядок элемента g обозначается $\text{ord}g$.

Лемма 2. Пусть g – элемент группы G такой, что $\text{ord}g = n$, а m – целое число. Тогда

$$\text{ord}g^m = \frac{n}{\text{НОД}(m, n)}.$$

Доказательство. По свойству степеней $(g^m)^k = g^{mk}$. Следовательно порядок g^m – это минимальное натуральное k такое, что mk делится на n .

Рассмотрим разложения на простые множители чисел n и m . Можем считать, что простые множители входящие в m и n одинаковы, но при этом степени вхождения могут быть равны нулю.

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l}, \quad m = p_1^{\beta_1} \dots p_l^{\beta_l}.$$

Имеем: $\text{НОД}(m, n) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_l^{\min\{\alpha_l, \beta_l\}}$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{n}{\text{НОД}(m, n)} &= p_1^{\alpha_1 - \min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_l^{\alpha_l - \min\{\alpha_l, \beta_l\}} = \\ &= p_1^{\max\{\alpha_1 - \beta_1, 0\}} \dots p_l^{\max\{\alpha_l - \beta_l, 0\}} \end{aligned}$$

Легко видеть, что это минимальное число k такое, что km делится на $p_i^{\alpha_i}$ для каждого i . $\square$

Конечную группу можно задавать с помощью таблицы умножения. Таблица умножения – это квадратная таблица, строки и столбцы которой соответствуют элементам группы. А на пересечении строки и столбца стоит произведение элемента, соответствующее строки и элемента, соответствующего столбцу.

Пример 1. Построим таблицу сложения для группы $(\mathbb{Z}_2, +) = \{0, 1\}$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

Примеры групп.

1) Числовые аддитивные группы:

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +).$$

Нейтральный элемент 0 , обратный к элементу x – это $-x$. Выполнение аксиом следуют из свойств сложения чисел. Все данные группы бесконечны и коммутативны.

2) Группа вычетов (остатков) по модулю n : $(\mathbb{Z}_n, +)$. Сложение происходит по модулю n . Нейтральный элемент 0 , обратный к элементу x – это $n - x$. Выполнение аксиом следуют из свойств остатков. Данная группа коммутативна и имеет порядок n .

3) Числовые мультипликативные группы:

$$\mathbb{Q}^\times = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), \mathbb{R}^\times = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), \mathbb{C}^\times = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot).$$

Нейтральный элемент 1, обратный к элементу x – это $\frac{1}{x}$. Выполнение аксиом следуют из свойств умножения чисел. Данные группы бесконечны и коммутативны.

4) (Обобщение примера 3) Пусть R – кольцо с единицей. Обозначим множество обратимых элементов через $R^\times$. Рассмотрим группу обратимых элементов $(R^\times, \cdot)$. Нейтральный элемент – единица кольца. Обратные элементы существуют так как $R^\times$ состоит из обратимых элементов. Если R – коммутативное кольцо, то $R^\times$ – коммутативная группа.

Задача 2. Приведите пример некоммутативного кольца R такого, что $R^\times$ – коммутативная группа порядка больше 1.

5) Группа комплексных корней из единицы n -ой степени. Пусть $\mathcal{C}_n$ – множество всех комплексных корней степени n из 1. Тогда $(\mathcal{C}_n, \cdot)$ – абелева группа порядка n . Докажем это. Для того, чтобы доказать, что $\mathcal{C}_n$ – группа мы воспользуемся, тем, что это подмножество в известной нам группе $\mathbb{C}^\times$. Нам надо лишь проверить, что $\mathcal{C}_n$ замкнуто относительно умножения и взятия обратного. Пусть $a, b \in \mathcal{C}_n$, то есть $a^n = b^n = 1$. Тогда $(ab)^n = a^n b^n = 1$, значит, $ab \in \mathcal{C}_n$. Мы доказали, что $\mathcal{C}_n$ замкнуто относительно умножения. С другой стороны $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$, следовательно, $\mathcal{C}_n$ замкнуто относительно взятия обратного. То, что группа $\mathcal{C}_n$ абелева следует из того, что она является подгруппой в абелевой группе $\mathbb{C}^\times$.

Единица этой группы – это 1, обратный к элементу x – это $\frac{1}{x}$.

6) Группы перестановок.

а) Множество S_n всех перестановок n элементов с операцией композиции $\circ$ является группой. Докажем это. Нейтральный элемент этой группы – это тождественная перестановка, обратный элемент – обратная перестановка. Ассоциативность следует из следующей важной леммы.

Лемма 3. Пусть есть четыре множества: X, Y, Z и T . И пусть фиксированы отображения между этими множествами $\varphi: X \rightarrow Y$, $\psi: Y \rightarrow Z$ и $\zeta: Z \rightarrow T$. Тогда $(\zeta \circ \psi) \circ \varphi = \zeta \circ (\psi \circ \varphi)$.

Доказательство. Возьмем элемент $x \in X$. Тогда

$$(\zeta \circ \psi) \circ \varphi(x) = (\zeta \circ \psi)(\varphi(x)) = (\zeta(\psi(\varphi(x)))).$$

С другой стороны

$$\zeta \circ (\psi \circ \varphi)(x) = \zeta(\psi \circ \varphi)(x) = (\zeta(\psi(\varphi(x)))).$$

□

Применяя данную лемму к случаю $X = Y = Z = T = \{1, 2, \dots, n\}$ получаем ассоциативность S_n . Порядок группы S_n равен $n!$. При $n > 3$ группа S_n не коммутативна.

б) Множество A_n четных перестановок из S_n с операцией композиции образует *группу четных перестановок*. Докажем, что A_n – подгруппа S_n . Это следует из того, что произведение четных перестановок – четная перестановка и обратная к четной перестановке четная. Группа A_n не коммутативна при $n \geq 4$.

в) Группа Клейна. Рассмотрим множество перестановок (в виде произведения независимых циклов) $\{\text{id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$. Несложно проверить, что это множество замкнуто относительно композиции и что каждая перестановка из этого множества обратна самой себе. Получаем, что данные перестановки образуют подгруппу в S_4 , которая обозначается V_4 . Эта группа коммутативна.

6') (Обобщение примера 6а) Пусть X – некоторое множество (возможно бесконечное). Рассмотрим множество $S(X)$ биекций $X \rightarrow X$ с операцией композиции. Если $|X| < \infty$, то получаем группу перестановок. В общем случае получаем *группу симметрий множества X* . Нейтральный элемент – тождественное преобразование. Обратный – обратное преобразование. Ассоциативность следует из леммы 3.

7) Матричные группы. Пусть $\mathbb{K}$ – поле.

а) $GL_n(\mathbb{K})$ – множество невырожденных матриц $n \times n$ с элементами из $\mathbb{K}$. Легко видеть, что это множество замкнуто относительно умножения матриц. Умножение матриц ассоциативно, единичная матрица – нейтральный элемент и все невырожденные матрицы обратимы (обратная также невырождена). Следовательно, $(GL(\mathbb{K}), \cdot)$ – группа.

б) $SL_n(\mathbb{K})$ – множество $n \times n$ матриц с определителем 1 с элементами из $\mathbb{K}$. Это подмножество замкнуто относительно умножения и взятия обратного.

Эти группы конечны тогда и только тогда, когда поле $\mathbb{K}$ конечно.

8) Группы преобразований векторного пространства. (Подгруппы в группе $S(V)$, где V – векторное пространство.)

а) Группа обратимых линейных преобразований V .

б) Группа ортогональных линейных преобразований V .

в) Группа обратимых аффинных преобразований V .

г) Группа движений V .

Во всех этих группах нейтральный элемент – тождественное преобразование, а обратный элемент – обратное преобразование. Эти группы конечны тогда и только тогда, когда поле, над которым V – векторное пространство конечно и размерность V конечна.

ЛЕКЦИЯ 2

Определение 8. Пусть $(G, *)$ и $(H, \circ)$ – две группы. Отображение $\varphi: G \rightarrow H$ называется *гомоморфизмом*, если $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$.

Докажем следующие элементарные свойства гомоморфизма.

Лемма 4. Пусть $\varphi: (G, *) \rightarrow (H, \circ)$ – гомоморфизм. Обозначим через e_G и e_H единицы группы G и H соответственно. Тогда

1) $\varphi(e_G) = e_H$,

2) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. (В левой части обратный берется в группе G , а в правой – в H .)

Доказательство. 1) Поскольку e_G – единица группы G . Тогда $e_G * e_G = e_G$, а значит,

$$\varphi(e_G) \circ \varphi(e_G) = \varphi(e_G * e_G) = \varphi(e_G).$$

В группе H есть обратный к $\varphi(e_G)$ элемент. Умножим на него обе части. Получим

$$\varphi(e_G) = e_H.$$

2) $e_H = \varphi(e_G) = \varphi(g * g^{-1}) = \varphi(g) \circ \varphi(g^{-1})$. Следовательно, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. $\square$

Задача 3. Пусть $(G, *)$ и $(H, \circ)$ – моноиды с единицами e_G и e_H соответственно. И пусть $\psi: G \rightarrow H$ – отображение такое, что $\psi(g_1 * g_2) = \psi(g_1) \circ \psi(g_2)$. Может ли так быть, что $\psi(e_G) \neq \psi(e_H)$?

Определение 9. Биективный гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ называется *изоморфизмом*, а группы G и H при наличии изоморфизма между ними называются *изоморфными*.

Легко видеть, что если φ – изоморфизм, то обратное отображение φ^{-1} также является изоморфизмом. Кроме того композиция двух изоморфизмов – изоморфизм. Из этого следует, что классы изоморфности групп – это классы эквивалентности.

Пример 2. Рассмотрим две группы: $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Вторая группа состоит из всех положительных вещественных чисел с операцией умножения. Рассмотрим отображение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $\varphi(x) = 2^x$. Легко видеть, что φ – изоморфизм.

Пример 3. Группа $\mathbb{Z}_n$ изоморфна группе C_n . Один из возможных автоморфизмов переводит $k \in \mathbb{Z}_n$ в $\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$. То, что φ – гомоморфизм обеспечивается тем, что при умножении комплексных чисел их аргументы складываются.

Пример 4. Группа $GL_n(\mathbb{C})$ изоморфна группе невырожденных линейных преобразований векторного пространства $\mathbb{C}^n$ с операцией композиции. Чтобы получить изоморфизм между этими группами нужно выбрать некоторый базис в $\mathbb{C}^n$ и отобразить линейное преобразование в его матрицу в этом базисе.

Изоморфные группы имеют одинаковую алгебраическую структуру. Более строго любой алгебраический факт (то есть формулирующийся только в терминах операции) верный в одной из них, верен и в другой. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять изоморфные группы и будем изучать группы с точностью до изоморфизма.

На самом деле изоморфизм (биективное соответствие, переводящее умножение одной группы в умножение другой) можно задать в случае, когда про одну из структур не известно, группа это или нет. Тогда вторая структура будет автоматически группой. Воспользуемся этой идеей в следующем примере.

Группа кватернионов Q_8 . Рассмотрим множество из 8 элементов:

$$\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

Умножение устроено следующим образом: знаки умножаются отдельно,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k, ji = -k, ik = -j, ki = j, jk = i, kj = -i.$$

Легко видеть, что 1 – нейтральный элемент, и каждый элемент обратим. Для того, чтобы утверждать, что Q_8 – группа, необходимо проверить ассоциативность. Сделаем это опосредованно.

Рассмотрим следующее множество из 8 комплексных матриц, которое мы обозначим $\overline{Q}_8$.

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Здесь i – это мнимая единица (комплексное число).

Рассмотрим биекцию φ между Q_8 и $\overline{Q}_8$.

$$\pm 1 \mapsto \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \mapsto \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j \mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k \mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что φ переводит умножение в Q_8 в матричное умножение. Следовательно, $(\overline{Q}_8, \cdot)$ – это замкнутое относительно умножения и взятия обратной матрицы подмножество в $GL_2(\mathbb{C})$. Значит, $\overline{Q}_8$ – подгруппа. Тогда Q_8 – группа, изоморфная $\overline{Q}_8$.

Еще один важный пример группы дадут следующая конструкция.

Группа диэдра D_n . Рассмотрим правильный n -угольник. Группа диэдра D_n – это группа всех движений плоскости, сохраняющих этот n -угольник.

Упражнение 3. а) Докажите, что в группе D_n ровно $2n$ элементов. Среди них n поворотов и n осевых симметрий. Все оси симметрий проходят через центр n -угольника. Если n чётно, то половина симметрий проходит через 2 вершины, а половина – через две середины противоположных сторон. Если же n нечётно, то все симметрии проходят через одну вершину и середину противоположной стороны.

б) Найдите, как устроена операция в группе D_n , то есть чему равна композиция двух поворотов, двух симметрий и поворота с симметрией.

Можно конструировать группу из уже известных с помощью следующей конструкции.

Определение 10. Пусть G и H – две группы. *Прямым произведением* n_b групп называется группа $G \times H$, состоящая из пар (g, h) , где $g \in G$, $h \in H$. Операция устроена следующим образом: $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$. Ассоциативность следует из ассоциативности операций в G и H . Нейтральный элемент – это (e_G, e_H) , обратный элемент к элементу (g, h) – это (g^{-1}, h^{-1}) . Порядок прямого произведения групп – это произведение их порядков.

Особый интерес представляют гомоморфизмы и изоморфизмы из группы в себя.

Определение 11. Гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow G$ называется *эндоморфизмом*. Изоморфизм $\varphi: G \rightarrow G$ называется *автоморфизмом*.

Легко видеть, что композиция двух эндоморфизмов – это эндоморфизм, а композиция двух автоморфизмов – автоморфизм. Множество эндоморфизмов группы G с операцией композиции образует моноид $\text{End}(G)$ с нейтральным элементом id . Множество автоморфизмов группы G с операцией композиции образует группу $\text{Aut}(G)$.

Пусть g – элемент группы G . Рассмотрим отображение $\varphi_g: G \rightarrow G$, определённое по правилу $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$.

Лемма 5. *Отображение φ_g является автоморфизмом группы G .*

Доказательство. Проверим, что φ_g – гомоморфизм:

$$\varphi_g(hf) = ghfg^{-1} = ghg^{-1}gfg^{-1} = \varphi_g(h)\varphi_g(f).$$

То, что φ_g – биекция следует из того, что существует обратное отображение. А именно, обратное к φ_g отображение – это $\varphi_{g^{-1}}$. $\square$

Автоморфизмы называются *внутренними*, если он имеет вид φ_g для некоторого $g \in G$.

Предложение 2. а) *Множество внутренних автоморфизмов с операцией композиции образует подгруппу $\text{Inn}(G)$ в $\text{Aut}(G)$.*

б) *Отображение $g \rightarrow \varphi_g$ – это гомоморфизм из G в $\text{Inn}(G)$.*

Доказательство. Докажем равенство $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$. Для этого применим этот гомоморфизм к элементу $s \in G$:

$$\varphi_g \circ \varphi_h(s) = \varphi_g(\varphi_h(s)) = \varphi_g(hsh^{-1}) = ghsh^{-1}g^{-1} = (gh)s(gh)^{-1} = \varphi_{gh}(s).$$

Из доказанного равенства следует пункт б) и замкнутость $\text{Inn}(G)$ относительно композиции. Осталось проверить, что $\text{Inn}(G)$ замкнуто относительно взятия обратного. Для этого заметим, что $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_e = \text{id}$. $\square$

Определение 12. Группа G называется *циклической*, если найдется элемент $g \in G$ такой, что каждый элемент G имеет вид g^k для некоторого целого числа k .

Элемент g называется *порождающим элементом группы G* , при этом группа G обозначается $\langle g \rangle$.

Замечание 1. В предыдущем определении не требуется, чтобы все степени g были различны.

Пример 5. а) Группа $\mathbb{Z}$ является циклической. В самом деле, $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.

б) Аналогично $\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$.

Упражнение 4. Проверьте, что группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $(Q, +)$ и $\mathbb{Q}^\times$ не являются циклическими.

Лемма 6. Пусть $\text{ord}(g) = n$. Тогда порядок группы $\langle g \rangle$ также равен n .

Доказательство. Рассмотрим множество элементов $S = \{g^0 = e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$. Докажем, что все элементы группы $\langle g \rangle$ лежат в S и что все элементы S различны.

В самом деле, пусть g^k – некоторый элемент $\langle g \rangle$. Разделим k на n с остатком: $k = nt + r$, где $0 \leq r < n$. Тогда $g^k = (g^n)^t g^r = g^r \in S$.

С другой стороны. Пусть $0 \leq a < b < n$ и $g^a = g^b$. Умножая последнее равенство на g^{-a} , получаем $e = g^{b-a}$. Поскольку $0 < b - a < n$, это противоречит тому, что $\text{ord}(g) = n$. $\square$

Если известно, что порядок g равен n , то группу $\langle g \rangle$ обозначают $\langle g \rangle_n$.

Замечание 2. Для каждого элемента g некоторой группы G можно рассмотреть циклическую подгруппу, порожденную этим элементом: $\langle g \rangle \subset G$.

Теорема 1. а) Любая циклическая группа бесконечного порядка изоморфна $\mathbb{Z}$.

б) Любая циклическая группа порядка n изоморфна $\mathbb{Z}_n$.

Доказательство. а) Пусть $G = \langle g \rangle$ и $|G| = \infty$. Тогда $\text{ord}(g) = \infty$. Из этого следует, что при $k \neq t$ выполнено $g^k \neq g^t$. Рассмотрим отображение

$$\psi: \mathbb{Z} \rightarrow G, \quad k \mapsto g^k.$$

Легко видеть, что ψ – гомоморфизм. Так как все элементы G имеют вид g^k , ψ – сюръекция, а так как при $k \neq t$ выполнено $g^k \neq g^t$, ψ – инъекция. Итак, ψ – изоморфизм.

б) В предыдущей лемме мы доказали, что $G = \{g^0, \dots, g^{n-1}\}$. Рассмотрим отображение

$$\psi: \mathbb{Z}_n \rightarrow G, \quad k \mapsto g^k, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Легко видеть, что ψ – изоморфизм. $\square$

Теорема 2. 1) Подгруппа циклической группы циклическая.

2) Все подгруппы в $\mathbb{Z}$ имеют вид $k\mathbb{Z}$.

3) Все подгруппы в $\mathbb{Z}_n$ имеют вид $\langle d \rangle = d\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{d}}$, где d делитель числа n . В частности, для каждого делителя q числа n есть ровно одна подгруппа в $\mathbb{Z}_n$, изоморфная $\mathbb{Z}_q$, а именно, $\langle \frac{n}{q} \rangle$.

4) Пусть $m \in \mathbb{Z}_n$, тогда $\langle m \rangle = \langle \text{НОД}(m, n) \rangle$.

Доказательство. 1) Пусть $G = \langle g \rangle$ и пусть H – некоторая подгруппа в G . Если $H = \{e\}$, то утверждение доказано. Пусть $H \neq \{e\}$. Если $g^k \in H$, то $g^{-k} \in H$. Значит существует положительное число k такое, что $g^k \in H$. Пусть l – наименьшее положительное число такое, что $g^l \in H$. Рассмотрим некоторое t такое, что $g^t \in H$. Разделим

m на l с остатком: $m = ls + r$, где $0 \leq r < l$. Получаем $g^r = g^m(g^l)^{-s} \in H$. Поскольку l минимальное положительное число такое, что $g^l \in H$, получаем $r = 0$. То есть в G все элементы имеют вид $(g^l)^s$, значит $G = \langle g^l \rangle$.

2) По пункту 1 любая подгруппа в циклической группе $\mathbb{Z}$ имеет вид $\langle k \rangle = k\mathbb{Z}$.

3) По доказательству пункта 1 подгруппа $H \subset \langle g \rangle$ циклическая и порождается элементом g^l для минимального положительного l такого, что $g^l \in H$. Значит если H – подгруппа $\mathbb{Z}_n$, то $H = \langle d \rangle$, где d – минимальное положительное число такое, что его вычет лежит в H . Допустим, что n не делится на d . Тогда $n = dq + r$, где $0 < r < d$. Однако тогда r – положительное число меньше d такое, что его вычет лежит в H . Это противоречие с выбором d . Значит, n делится на d . Легко видеть, что $\langle d \rangle = d\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{d}}$.

4) По лемме 2 порядок элемента $m \in \mathbb{Z}_n$ равен $\frac{n}{\text{НОД}(m,n)}$. А значит,

$$\langle m \rangle \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{\text{НОД}(m,n)}}.$$

Но по пункту 3 есть ровно одна подгруппа в $\mathbb{Z}_n$, изоморфная $\mathbb{Z}_{\frac{n}{\text{НОД}(m,n)}}$ и это $\langle \text{НОД}(m,n) \rangle$. Следовательно, $\langle m \rangle = \langle \text{НОД}(m,n) \rangle$. $\square$

ЛЕКЦИЯ 3

Теорема 3. 1) $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$,

2) $\text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n^\times$.

Замечание 3. Напомним, что $\mathbb{Z}_n^\times$ – это группа обратимых по умножению элементов кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$. Группа $\mathbb{Z}_n^\times$ состоит из вычетов взаимно простых с n . В частности, $|\mathbb{Z}_n^\times| = \varphi(n)$, где $\varphi(\cdot)$ – функция Эйлера.

Доказательство теоремы 3. 1) Пусть ψ – автоморфизм $\mathbb{Z}$. Тогда $\psi(0) = 0$. Пусть $\psi(1) = k$. Тогда

$$\psi(2) = \psi(1+1) = \psi(1) + \psi(1) = 2k,$$

$$\psi(3) = \psi(1+1+1) = \psi(1) + \psi(1) + \psi(1) = 3k,$$

и т.д. Аналогично $\psi(-1) = -k$, $\psi(-2) = \psi((-1) + (-1)) = -2k$. Получаем

$$\psi(m) = mk.$$

Однако при $k \neq \pm 1$ гомоморфизм ψ не будет сюръективен. При $k = 1$ и $k = -1$ получаем тождественное отображение и отображение $\{x \mapsto -x\}$. Легко видеть, что эти два автоморфизма с операцией композиции образуют группу, изоморфную $\mathbb{Z}_2$.

2) Аналогично случаю 1 любой гомоморфизм $\psi: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ имеет вид

$$\psi_k: m \mapsto km.$$

Если k не обратим, то в образе ψ_k не лежит 1, а значит, ψ_k не сюръективно. Если же k обратим, то для любого вычета l имеем $\psi_k(k^{-1}l) = l$. Следовательно, ψ_k сюръективно, а значит, так как множество $\mathbb{Z}_n$ конечно, гомоморфизм ψ_k – биекция.

Итак, $\text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ состоит из ψ_k для $k \in \mathbb{Z}_n^\times$. Докажем, что отображение

$$\zeta: \text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \rightarrow \mathbb{Z}_n^\times, \quad \zeta(\psi_k) = k$$

является изоморфизмом. Это очевидно биекция, осталось проверить, что ζ – гомоморфизм. Это следует из равенства $\psi_k \circ \psi_m = \psi_{km}$, которое легко проверить. $\square$

Определение 13. Пусть H – подгруппа группы G . Рассмотрим элемент $g \in G$. *Левым смежным классом элемента g по подгруппе H* называется множество

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

Правым смежным классом элемента g по подгруппе H называется множество

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}.$$

Лемма 7. 1) $g \in fH$ тогда и только тогда, когда $f^{-1}g \in H$,

1') $g \in Hf$ тогда и только тогда, когда $gf^{-1} \in H$,

2) Левые (правые) смежные классы – это классы эквивалентности. (Более точно, отношение $g \sim f$, если $g \in fH$ является отношением эквивалентности.)

3) Следующие мощности одинаковы $|gH| = |Hg| = |H|$.

Доказательство. 1) $g \in fH \iff g = fh \iff f^{-1}g = h$.

1') $g \in Hf \iff g = hf \iff gf^{-1} = h$.

2) Докажем только для левых смежных классов. Для правых аналогично.

Рефлексивность: $g \in gH$ так как $e \in H$,

Симметричность:

$$g \in fH \iff f^{-1}g \in H \iff (f^{-1}g)^{-1} = g^{-1}f \in H \iff f \in gH.$$

Транзитивность:

$$g \in fH, f \in sH \implies f^{-1}g \in H, s^{-1}f \in H \implies s^{-1}ff^{-1}g = s^{-1}g \in H.$$

3) Следует из того, что $gh_1 = gh_2$ тогда и только тогда, когда $h_1 = h_2$. $\square$

Замечание 4. Из пункта 2 следует, что левые (правые) смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают.

Определение 14. Индекс подгруппы H группы G – это мощность множества левых смежных классов. Обозначается индекс $[G : H]$

Задача 4. Докажите, что $gH \leftrightarrow Hg^{-1}$ – биекция между левыми и правыми смежными классами, и следовательно мощность правых смежных классов также равна индексу подгруппы.

Теорема 4. (Лагранж) Пусть G – конечная группа и H – подгруппа G . Тогда

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

Доказательство. Поскольку каждый элемент группы G лежит в некотором левом смежном классе и левые смежные классы либо совпадают, либо не пересекаются, вся группа G разбивается на непересекающиеся левые смежные классы. Так как мощность каждого смежного класса равна $|H|$, мощность всей группы равна $|H|$ умножить на количество смежных классов. $\square$

Следствие 1. (Следствия из теоремы Лагранжа)

1) Порядок конечной группы делится на порядок ее подгруппы.

2) Порядок конечной группы делится на порядок ее элемента.

3) Для любого элемента g конечной группы G выполнено $g^{|G|} = e$.

4) Группа простого порядка циклическая.

5) (Теорема Эйлера) Пусть m и n – взаимно простые натуральные числа. Тогда $n^{\varphi(m)}$ имеет остаток 1 при делении на m .

Доказательство. 1) Очевидно следует из теоремы Лагранжа.

2) Пусть g – элемент конечной группы G . Рассмотрим циклическую подгруппу $H = \langle g \rangle$. Поскольку $\text{ord}(g) = |H|$, порядок G делится на $\text{ord}(g)$.

3) Пусть $|G| = \text{ord}(g) \cdot k$. Тогда $g^{|G|} = (g^{\text{ord}(g)})^k = e^k = e$.

4) Пусть $|G| = p$ – простое число. Рассмотрим $g \neq e \in G$. Поскольку порядок g делит p и не равен 1, получаем $\text{ord}(g) = p$. А значит, $G = \langle g \rangle$.

5) Применим пункт 3 к группе $\mathbb{Z}_m^\times$ и ее элементу n . Получаем

$$n^{|\mathbb{Z}_m^\times|} = n^{\varphi(m)} = 1.$$

□

Задача 5. Приведите пример конечной группы и делителя ее порядка такого, что в группе нет подгруппы такого порядка.

Теорема 5. (Коши) Пусть p – простой делитель порядка конечной группы G . Тогда в G есть элемент g порядка p .

Доказательство. Рассмотрим множество

$$S = \{(g_1, \dots, g_p) \mid g_i \in G, g_1 \cdot \dots \cdot g_p = e\}.$$

Найдем мощность S . Элементы $g_1, \dots, g_{p-1}$ можно выбрать любыми, а элемент g_p равен $(g_1 \cdot \dots \cdot g_{p-1})^{-1}$. Таким образом $|S| = |G|^{p-1}$. Так как $|G|$ делится на p , то и $|S|$ делится на p . Множество S есть объединение двух непересекающихся множеств: $U = \{g, \dots, g \mid g^p = e\}$ и

$$T = \{(g_1, \dots, g_p) \mid \exists g_i \neq g_j\}.$$

Рассмотрим $(g_1, \dots, g_p) \in T$. Так как $g_1 \cdot \dots \cdot g_p = e$, получаем $g_1 \cdot \dots \cdot g_{p-1} = g_p^{-1}$. Умножая на g_p слева, имеем $g_p \cdot g_1 \cdot \dots \cdot g_{p-1} = e$. Аналогично

$$(g_1, \dots, g_p) \in T, (g_p, g_1, \dots, g_{p-1}) \in T, \dots, (g_2, \dots, g_p, g_1) \in T.$$

Докажем, что все эти элементы T , получающиеся друг из друга циклическими сдвигами, различны. Допустим, что совершив $k < p$ сдвигов мы получим тот же элемент. Так как $\text{НОД}(k, p) = 1$, существуют целые u и v такие, что $uk + vp = 1$. Сделав u раз по k циклических сдвигов получим тот же элемент. (Если u меньше нуля, то циклические сдвиги делаем в другую сторону.) Затем сделаем v раз по p сдвигов. Снова получим тот же элемент. Но в итоге мы сделали ровно один циклический сдвиг. Значит, все элементы g_i одинаковы. Это противоречит определению T .

Итак, мы доказали, что все p элементов, полученных из элемента T циклическими сдвигами, различны. А значит, $|T|$ делится на p . Но тогда $|U| = |S| - |T|$ также делится на p . Очевидно, что $(e, e, \dots, e) \in U$. Так как $|U|$ не равно 1, есть другой элемент $(g, \dots, g) \in U$. Тогда $g^p = e$, а значит (так как p – простое число) $\text{ord}(g) = p$. □

Определение 15. Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $g \in G$ выполнено $gH = Hg$. То, что H – нормальная подгруппа G обозначается так: $G \triangleright H$.

Обозначим через gHg^{-1} множество $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$.

Лемма 8. Следующие условия равносильны:

- 1) $G \triangleright H$,
- 2) для каждого $g \in G$ выполнено $gHg^{-1} = H$,
- 3) для каждого $g \in G$ выполнено $gHg^{-1} \subset H$,

Доказательство. $1 \implies 2$ В множестве $gH = Hg$ каждый элемент имеет вид $gh_1 = h_2g$. При этом и h_1 и h_2 пробегают всю группу H . Домножим каждый элемент справа на g^{-1} , получим $gh_1g^{-1} = h_2$. То есть $gHg^{-1} = H$.

$2 \implies 3$ Очевидно.

$3 \implies 1$. Для каждого $g \in G$ и $h \in H$ выполнено $ghg^{-1} = \tilde{h} \in H$. Тогда $gh = ghg^{-1}g = \tilde{h}g$. Отсюда $gH \subset Hg$. Аналогично $hg = gg^{-1}hg = g\hat{h}$ для $\hat{h} = g^{-1}hg \in H$. Значит, $gH \supset Hg$. В итоге $gH = Hg$. $\square$

ЛЕКЦИЯ 4

Определение 16. Пусть H – нормальная подгруппа в группе G . Факторгруппа G/H – это множество (левых, они же правые) смежных классов по подгруппе H с операцией

$$(g_1H) \cdot (g_2H) = (g_1g_2)H.$$

Определение умножения в факторгруппе требует проверки корректности, то есть проверки того, что результат умножения не зависит от выбора представителей в смежных классах. Потенциальная проблема содержится в том, что $g_1H = g'_1H$, $g_2H = g'_2H$, но при этом смежный класс g_1g_2H может не совпадать с $g'_1g'_2H$. Тогда умножение называется некорректным.

Предложение 3. Пусть G – группа, H – подгруппа. Тогда умножение на множестве левых смежных классов корректно тогда и только тогда, когда H нормальна.

Доказательство. Пусть H нормальна и $g_1H = g'_1H$, $g_2H = g'_2H$. Получаем, что $g_1^{-1}g'_1 \in H$ и $g_2^{-1}g'_2 \in H$. Обозначим $g_1^{-1}g'_1$ через h . Имеем

$$(g'_1g'_2)^{-1}(g_1g_2) = g_2'^{-1}g_1'^{-1}g_1g_2 = g_2'^{-1}hg_2 \in H$$

Это означает, что g_1g_2H совпадает с $g'_1g'_2H$. Значит, умножение корректно.

Пусть теперь H не нормальна. Тогда найдутся $g \in G$ и $h \in H$ такие, что $ghg^{-1} \notin H$. Тогда $gH = (gh)H$. Рассмотрим следующие смежные классы: $gH = (gh)H$ и $g^{-1}H$. Имеем $gH \cdot g^{-1}H = H$, но $(gh)H \cdot g^{-1}H = (ghg^{-1})H \neq H$. Значит, умножение не корректно. $\square$

Легко видеть, что G/H действительно группа. Ассоциативность произведения следует из ассоциативности произведения в G , единичный элемент – это $eH = H$, обратный к gH элемент – это $g^{-1}H$. Из теоремы Лагранжа следует, что если G – конечная группа, то $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$.

Пусть $\varphi: G \rightarrow G'$ – гомоморфизм групп.

Определение 17. Ядро гомоморфизма φ – это полный прообраз единицы $\{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$. Обозначается ядро через $\text{Кер } \varphi$.

Образ гомоморфизма φ – это множество $\text{Im } \varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\}$.

Лемма 9. 1) Ядро $\text{Кер } \varphi$ – нормальная подгруппа в группе G .

2) Образ $\text{Im } \varphi$ – подгруппа в группе G' .

Доказательство. 1) Пусть $g_1, g_2 \in \text{Кер } \varphi$, тогда $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = e$. Значит, $g_1g_2 \in \text{Кер } \varphi$. То есть $\text{Кер } \varphi$ замкнуто относительно произведения. Аналогично, если $g \in G$, то $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} = e$. То есть $\text{Кер } \varphi$ замкнуто относительно взятия обратного. Поскольку $e \in \text{Кер } \varphi$, ядро не пусто. По предложению 1 ядро является подгруппой.

Пусть $g \in G$, $h \in \text{Кер } \varphi$. Тогда

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e.$$

Значит, $ghg^{-1} \in \text{Ker } \varphi$, то есть $\text{Ker } \varphi$ – нормальная подгруппа.

2) Пусть $\varphi(g)$ и $\varphi(h)$ – два элемента из $\text{Im } \varphi$. Тогда $\varphi(g)\varphi(h) = \varphi(gh) \in \text{Im } \varphi$. Значит, $\text{Im } \varphi$ замкнуто относительно умножения. Кроме того $\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})$, то есть $\text{Im } \varphi$ замкнуто относительно взятия обратного. Поскольку $\text{Im } \varphi$ не пусто, это подгруппа. $\square$

Определение 18. Рассмотрим следующее отображение $\pi_H: G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$. Из определения операции в факторгруппе следует, что π_H – гомоморфизм. Легко видеть, что он сюръективен. Гомоморфизм π_H называется *каноническим гомоморфизмом*.

Для канонического гомоморфизма ядро – это нормальная подгруппа H , а образ – факторгруппа G/H . Следующая теорема показывает, что ситуация аналогична для любого гомоморфизма.

Теорема 6. (Теорема о гомоморфизме) Пусть $\varphi: G \rightarrow G'$ – гомоморфизм групп. Тогда $G/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\Psi: G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi, \quad \Psi(g\text{Ker } \varphi) = \varphi(g).$$

Сперва нам надо проверить корректность отображения Ψ , то есть то, что оно не зависит от выбора представителя g из смежного класса. Для этого заметим, что если $g\text{Ker } \varphi = g'\text{Ker } \varphi$, то $g'^{-1}g = h \in \text{Ker } \varphi$. Тогда $g = g'h$. Получаем $\varphi(g) = \varphi(g'h) = \varphi(g')\varphi(h) = \varphi(g')e = \varphi(g')$. Таким образом, отображение Ψ определено корректно.

Докажем, что Ψ – изоморфизм. То, что Ψ – гомоморфизм следует из равенства:

$$\Psi((g\text{Ker } \varphi)(f\text{Ker } \varphi)) = \Psi(gf\text{Ker } \varphi) = \varphi(gf) = \varphi(g)\varphi(f) = \Psi(g\text{Ker } \varphi)\Psi(f\text{Ker } \varphi).$$

Инъективность Ψ следует из того, что если $\varphi(g) = \varphi(f)$, то $\varphi(f^{-1}g) = e$, то есть $f^{-1}g \in \text{Ker } \varphi$, а значит, $g\text{Ker } \varphi = f\text{Ker } \varphi$. Сюръективность Ψ очевидна, так как для любого элемента $\varphi(g)$ в $\text{Im } \varphi$ в него отображается смежный класс $g\text{Ker } \varphi$. $\square$

Следствие 2. Если $|G| < \infty$ и $\varphi: G \rightarrow G'$ – гомоморфизм, то

$$|\text{Ker } \varphi| \cdot |\text{Im } \varphi| = |G|.$$

Пример 6. Найдём, чему изоморфна факторгруппа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Для того, чтобы применить теорему о гомоморфизме, нам нужно построить гомоморфизм $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G'$ для некоторой группы G' такой, что $\text{Ker } \varphi = n\mathbb{Z}$. Легко видеть, что подходит следующий гомоморфизм

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad k \mapsto k \pmod{n}$$

Действительно, φ – гомоморфизм, $\text{Ker } \varphi = n\mathbb{Z}$ и φ – сюръекция, то есть $\text{Im } \varphi = \mathbb{Z}_n$. По теореме о гомоморфизме $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

Определение 19. Пусть группа G содержит подмножество S . Подгруппой, порождённой подмножеством S , называется минимальная подгруппа, содержащая S . Обозначается эта подгруппа $\langle S \rangle$. Если $G = \langle S \rangle$, то S называется *множеством порождающих* группы G .

Лемма 10. Пусть $G = \langle S \rangle$, тогда G совпадает с множеством конечных произведений элементов из S и обратных к ним, то есть

$$\{s_1^{\pm 1} \dots s_n^{\pm 1} \mid s_i \in S, n \in \mathbb{N}\}.$$

Доказательство. Легко видеть, что множество конечных произведений элементов из S и обратных к ним замкнуто относительно произведения и взятия обратного. Кроме того в нчм лежит $ss^{-1} = e$. Значит, это подгруппа, содержащая S , и следовательно, совпадает с G . $\square$

Упражнение 5. Докажите, что

- а) $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$,
- б) $S_n = \langle (1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n) \rangle = \langle (1, 2), (1, 2, \dots, n) \rangle$,
- в) $A_n = \langle (1, 2, 3), (1, 2, 4), \dots, (1, 2, n) \rangle$.

Пример 7. Напомним конструкцию сюръективного гомоморфизма $S_4 \rightarrow S_3$. Рассмотрим 4 переменные x_1, x_2, x_3, x_4 и три многочлена от этих переменных:

$$f_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \quad f_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \quad f_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Если применить к x_1, x_2, x_3, x_4 перестановку σ , то f_i переставятся между собой по перестановке $\tau(\sigma)$. Ясно, что $\tau(\sigma \circ \delta) = \tau(\sigma) \circ \tau(\delta)$, то есть τ – гомоморфизм $S_4 \rightarrow S_3$.

Заметим, что $\tau(2, 3) = (1, 2)$, значит, $(1, 2) \in \text{Im } \tau$. Аналогично можно проверить, что все транспозиции лежат в образе τ . Поскольку S_3 порождается транспозициями, гомоморфизм τ сюръективен. Легко видеть, что $V_4 \subset \text{Ker } \varphi$. С другой стороны $|\text{Ker } \varphi| = \frac{|S_4|}{|S_3|} = 4$. Следовательно, $\text{Ker } \varphi = V_4$.

По теореме о гомоморфизме получаем следующий изоморфизм:

$$S_4/V_4 \cong S_3.$$

Лемма 11. Пусть G – группа, $H \triangleleft G$ – нормальная подгруппа, $K \subset G$ – подгруппа. Тогда $\langle K \cup H \rangle = KH = \{kh \mid k \in K, h \in H\}$.

Доказательство. Докажем, что KH замкнуто относительно умножения. Действительно,

$$(k_1h_1)(k_2h_2) = k_1k_2k_2^{-1}h_1k_2h_2 = k_1k_2(k_2^{-1}h_1k_2)h_2 = k_1k_2\widehat{h}h_2 \in KH.$$

Теперь докажем, что KH замкнуто относительно взятия обратного:

$$(kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} = k^{-1}kh^{-1}k^{-1} = k^{-1}(kh^{-1}k^{-1}) = k^{-1}\widetilde{h} \in KH.$$

Поскольку KH не пусто, это группа. Очевидно, что KH – наименьшая подгруппа, содержащая K и H . $\square$

Теорема 7. (Вторая теорема о гомоморфизме) Пусть G – группа, $H \triangleleft G$ – нормальная подгруппа, $K \subset G$ – подгруппа.

- 1) $H \cap K$ – нормальная подгруппа в K и H – нормальная подгруппа в KH ,
- 2) $KH/H \cong K/(H \cap K)$.

Доказательство. 1) Пусть $a \in H \cap K$, $k \in K$. Тогда $a \in H \Rightarrow kak^{-1} \in H$. С другой стороны $a \in K \Rightarrow kak^{-1} \in K$. То есть $kak^{-1} \in H \cap K$. То есть $(H \cap K) \triangleleft K$.

Пусть $h \in H$, $g \in KH$, тогда, так как $g \in G$, $ghg^{-1} \in H$. Значит, $H \triangleleft KH$.

2) Рассмотрим $\Psi: K \rightarrow (KH)/H$, $k \mapsto kH$. Докажем, что Ψ – сюръекция. Действительно, пусть $khH \in (KH)/H$. Тогда $khH = kH = \Psi(k)$. Легко видеть, что Ψ – гомоморфизм. Найдем ядро Ψ . Пусть $k \in \text{Ker } \Psi$, тогда $kH = H$. Это значит, что $k \in H$. С другой стороны $k \in K$. То есть $k \in (H \cap K)$. Итак, $\text{Ker } \Psi = H \cap K$. По теореме о гомоморфизме $K/(H \cap K) \cong KH/H$. $\square$

Теорема 8. (Третья теорема о гомоморфизме) Пусть $\varphi: G \rightarrow G'$ – сюръективный гомоморфизм, $K = \text{Ker } \varphi$, $H' \subset G'$ – подгруппа. Пусть $H = \varphi^{-1}(H')$ – полный прообраз. Тогда

- 1) $H' \leftrightarrow H$ – биекция между подгруппами в G' и подгруппами в G , содержащими K .
- 2) Подгруппа H нормальна в G тогда и только тогда, когда H' нормальна в G' .
- 3) Если H и H' нормальны, то $G/H \cong G'/H'$.

Доказательство. 1) Для подгруппы $H' \subset G'$ обозначим через $\Omega(H') = H$ подгруппу $\varphi^{-1}(H') \subset G$. Легко видеть, что $\Omega(H')$ содержит $K = \varphi^{-1}(e)$. Пусть H – подгруппа G , содержащая K , обозначим через $\Theta(H)$ образ $\varphi(H)$, это подгруппа в G' . Докажем, что Ω и Θ – взаимно обратные отображения. Для этого надо проверить, что $\Omega \circ \Theta = \text{id}$ и $\Theta \circ \Omega = \text{id}$. Действительно, $\Theta \circ \Omega(H')$ – это образ от полного прообраза H' , то есть H' . Теперь рассмотрим $\Omega \circ \Theta(H)$ – полный прообраз от образа H . Очевидно, что $H \subset \Omega \circ \Theta(H)$. Пусть $g \in \Omega \circ \Theta(H)$, тогда $\varphi(g) \in \Theta(H)$. Следовательно, есть $h \in H$ такое, что $\varphi(h) = \varphi(g)$. Тогда $\varphi(h^{-1}g) = e$, то есть $h^{-1}g \in K$. Значит $g = hk \in H$. Итак, $\Omega \circ \Theta(H) = H$.

2) Пусть $G \triangleright H$. Рассмотрим $h' \in H'$, $g' \in G'$. Так как гомоморфизм φ сюръективный, найдутся $h \in H$ и $g \in G$ такие, что $\varphi(h) = h'$, $\varphi(g) = g'$. Тогда $ghg^{-1} \in H$, а значит, $g'h'g'^{-1} = \varphi(ghg^{-1}) \in H'$. Таким образом, $H' \triangleleft G'$.

Пусть теперь $H' \triangleleft G'$. Рассмотрим $g \in G$, $h \in H$. Тогда $\varphi(g) \in G'$, $\varphi(h) \in H'$, а значит, $\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} \in H'$. Тогда $ghg^{-1} \in H$, то есть $G \triangleright H$.

3) Рассмотрим композицию гомоморфизмов $\Psi = \pi_{H'} \circ \varphi: G \rightarrow G'/H'$. Так как φ и $\pi_{H'}$ – сюръекции, Ψ – также сюръекция. Заметим, что $\Psi(g) = eH'$ тогда и только тогда, когда $\varphi(g) \in H'$, то есть $g \in H$. Получаем, что $\text{Ker } \Psi = H$. По теореме о гомоморфизме получаем $G/H \cong G'/H'$. $\square$

ЛЕКЦИЯ 5

Следствие 3 (Следствие из третьей теоремы о гомоморфизме). Пусть H и N – две нормальные подгруппы группы G , причем $N \subset H$. Пусть $\pi_N: G \rightarrow G/N$ – канонический гомоморфизм. Тогда $\pi_N(H) \cong H/N$ – нормальная подгруппа в G/N и

$$(G/N)/(\pi_N(H)) \cong G/H.$$

Доказательство. Гомоморфизм $\pi_N: G \rightarrow G/N = G'$ сюръективен. Значит, мы находимся в условиях третьей теоремы о гомоморфизме. Поскольку H – нормальная подгруппа в G , $\pi_N(H)$ – также нормальная подгруппа в G/N . Так как $\text{Ker } \pi_N = N$, $\pi_N(H) \cong H/N$. По пункту 3) третьей теоремы о гомоморфизме

$$G/H \cong (G/N)/\pi_N(H).$$

$\square$

Пример 8. Рассмотрим нормальные подгруппы $V_4 \subset A_4$ в S_4 . По предыдущему следствию получаем $S_4/A_4 \cong (S_4/V_4)(A_4/V_4)$. В самом деле, $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$, $S_4/V_4 \cong S_3$ (см. пример 7), $|A_4/V_4| = 3$, а значит, $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$. При этом $\pi_{V_4}(A_4) \cong \mathbb{Z}_3$ – подгруппа в S_3 , следовательно, $\pi_{V_4}(A_4) = A_3$. И мы получаем, что $(S_4/V_4)(A_4/V_4) \cong S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$.

Определение 20. Центр группы G – это множество $Z(G)$ элементов, коммутирующих со всеми элементами группы. $Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in G : gz = zg\}$.

Лемма 12. Центр – это нормальная подгруппа G .

Доказательство. Пусть $z_1, z_2 \in Z(G)$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено

$$z_1 z_2 g = z_1 g z_2 = g z_1 z_2.$$

Значит, $Z(G)$ – замкнутое относительно операции подмножество. Для доказательства замкнутости относительно взятия обратного заметим, что если $z \in Z(G)$, то для любого $g \in G$ выполнено $zg^{-1} = g^{-1}z$. Тогда

$$z^{-1}g = (g^{-1}z)^{-1} = (zg^{-1})^{-1} = gz^{-1}.$$

Кроме того $Z(G) \neq \emptyset$, так как $e \in Z(G)$.

То, что подгруппа $Z(G)$ нормальна следует из равенства $gzg^{-1} = z \in Z(G)$. $\square$

Предложение 4. Факторгруппа группы G по центру изоморфна группе внутренних автоморфизмов $\text{Inn}(G)$.

Доказательство. По предложению 2(б) отображение $\Psi: G \rightarrow \text{Inn}(G)$, $g \mapsto \varphi_g$ является гомоморфизмом. По определению внутренних автоморфизмов гомоморфизм Ψ сюръективен. Ядро Ψ состоит из тех элементов $g \in G$, для которых $\varphi_g = \text{id}$, то есть $\forall h \in G$ выполнено $ghg^{-1} = h$. Это означает $g \in Z(G)$. Итак, $\text{Ker } \varphi = Z(G)$, $\text{Im } \varphi = \text{Inn}(G)$. По теореме о гомоморфизме $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$. $\square$

Предложение 5. Если группа G не коммутативна, то группа $G/Z(G)$ не является циклической.

Доказательство. Предположим, что $G/Z(G) = \langle aZ(G) \rangle$, $a \in G$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено $g \in a^k Z(G)$, то есть $g = a^k z$, где $z \in Z(G)$. Возьмем $g_1, g_2 \in G$, тогда $g_1 = a^k z_1$, $g_2 = a^m z_2$. Имеем

$$g_1 g_2 = a^k z_1 a^m z_2 = a^{k+m} z_1 z_2 = a^{k+m} z_2 z_1 = a^m z_2 a^k z_1 = g_2 g_1.$$

Таким образом, G коммутативна. (И следовательно, $G/Z(G) \cong \{e\}$.) $\square$

Пусть S – некоторое множество. Рассмотрим множество конечных слов от букв $s \in S$ и s^{-1} , где $s \in S$. (Так как на множестве S нет никакой операции, то s^{-1} – некий формальный символ.) Также мы рассматриваем пустое слово $\emptyset$. Два слова назовем *эквивалентными*, если одно переводится в другое некой конечной цепочкой следующих элементарных преобразований:

1) Если в некотором месте есть пара подряд идущих букв ss^{-1} или $s^{-1}s$, то их можно убрать.

2) В любое место можно вписать пару ss^{-1} или $s^{-1}s$.

Конкатенацией двух слов называется операция приписывания одного слова к другому. Например, $(xux^{-1})(xzzx) = xux^{-1}xzzx$.

Лемма 13. Класс эквивалентности конкатенации слов из двух классов эквивалентности не зависит от выбора представителей в этих классах.

Доказательство. Пусть слово A эквивалентно слову B , а слово C эквивалентно слову D . Наша задача доказать, что слова AC и BD эквивалентны. Заметим, что мы можем делать с левой частью слова AC те же элементарные преобразования, что и со словом A и получим слово BC . Затем будем делать с правой частью BC те же элементарные преобразования, что и с C . Получим CD . $\square$

Определение 21. Свободной группой с множеством порождающих S называется множество классов эквивалентности конечных слов от букв $s \in S$ и s^{-1} , где $s \in S$ с операцией конкатенации. Обозначать эту группу мы будем $\langle S \rangle$.

Если множество S конечно, то $|S|$ называется *рангом* свободной группы $\langle S \rangle$.

Замечание 5. Легко видеть, что свободная группа действительно является группой. Ассоциативность конкатенации очевидна. Нейтральный элемент – класс пустого слова. Обратный элемент к каждому слову легко выписать.

Теорема 9. Пусть G группа с порождающими $g_1, \dots, g_k$. Существует единственный гомоморфизм из свободной группы $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ ранга k в группу G такой, что $\varphi(x_i) = g_i$. Гомоморфизм φ сюръективен.

Доказательство. Пусть φ переводит класс слова $x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_m}^{\varepsilon_m}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, в

$$g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots g_{i_m}^{\varepsilon_m} \in G.$$

Чтобы проверить корректность определения, нужно доказать, что g не зависит от выбора представителя в классе. Если два слова отличаются элементарным преобразованием, то в одном из них есть "дополнительное" $x_i x_i^{-1}$, которое переходит в $g_i g_i^{-1} = e$. Это не меняет образ. То, что φ – гомоморфизм и $\varphi(x_i) = g_i$ очевидно. Сюръективность следует из того, что G порождается $g_1, \dots, g_k$. $\square$

Определение 22. Пусть M – некоторое подмножество группы G . Нормальное замыкание M – это наименьшая по включению нормальная $N(M)$ в G подгруппа, содержащая M .

Легко видеть, что пересечение нормальных подгрупп – это нормальная подгруппа. Из этого следует, что наименьшая нормальная подгруппа, содержащая M существует.

Лемма 14. Подгруппа $N(M)$ совпадает с подгруппой, порожденной элементами gtg^{-1} для всех $t \in M, g \in G$.

Доказательство. Поскольку $N(M)$ – нормальная подгруппа и $M \subset N(M)$, получаем $gtg^{-1} \in N(M)$, а значит, $\langle gtg^{-1} \mid g \in G, t \in M \rangle \subset N(M)$. С другой стороны $\langle gtg^{-1} \mid g \in G, t \in M \rangle$ – это нормальная подгруппа. В самом деле, $(gtg^{-1})^{-1} = gt^{-1}g^{-1}$. А значит, любой элемент $\langle gtg^{-1} \mid g \in G, t \in M \rangle$ имеет вид

$$(g_1 m_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1}) \dots (g_k m_k^{\varepsilon_k} g_k^{-1}) \quad \varepsilon_j = \pm 1.$$

При этом

$$\begin{aligned} & g(g_1 m_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1}) \dots (g_k m_k^{\varepsilon_k} g_k^{-1}) g^{-1} = \\ & = (gg_1 m_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1} g^{-1})(gg_2 m_2^{\varepsilon_2} g_2^{-1} g^{-1}) \dots (gg_k m_k^{\varepsilon_k} g_k^{-1} g^{-1}) \in \langle gtg^{-1} \mid g \in G, t \in M \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

Определение 23. Говорят, что группа G задана образующими $g_1, \dots, g_k$ и соотношениями $g_1^{\alpha_1} \dots g_k^{\alpha_k}, \dots, g_1^{\beta_1} \dots g_k^{\beta_k}$, если для гомоморфизма $\varphi: \langle x_1, \dots, x_k \rangle \rightarrow G$, $x_i \mapsto g_i$ ядро совпадает с $N(x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}, \dots, x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k})$. Тогда

$$G \cong \langle x_1, \dots, x_k \rangle / N(x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}, \dots, x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k}).$$

В таком случае пишут

$$G = \langle g_1, \dots, g_k \mid g_1^{\alpha_1} \dots g_k^{\alpha_k}, \dots, g_1^{\beta_1} \dots g_k^{\beta_k} \rangle.$$

Пример 9. Докажем, что $D_n = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^n \rangle$.

Ясно, что D_n порождается двумя симметриями с минимальным углом между ними. Их композиция – это поворот на $\frac{2\pi}{n}$. Если обозначить эти симметрии a и b , то ясно, что $a^2 = b^2 = (ab)^n = e$. То есть для $\varphi: \langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow D_n$, $x_1 \mapsto a, x_2 \mapsto b$ ядро

содержит $N(x_1^2, x_2^2, (x_1x_2)^n)$. Наша цель – доказать, что $\text{Ker } \varphi = N(x_1^2, x_2^2, (x_1x_2)^n)$. Если это не так, то по следствию 3 имеем:

$$G \cong \langle x_1, x_2 \rangle / \text{Ker } \varphi \cong (\langle x_1, x_2 \rangle / N(x_1^2, x_2^2, (x_1x_2)^n)) / (\text{Ker } \varphi / N(x_1^2, x_2^2, (x_1x_2)^n)).$$

Тогда порядок группы G будет строго меньше, чем $H = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^n \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle / N(x_1^2, x_2^2, (x_1x_2)^n)$. Докажем, что в H не более $2n$ элементов. Легко видеть, что любой элемент H может быть записан либо в виде конечного слова $abab \dots$, либо в виде $ba \dots$. Действительно, $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$, значит, любое слово от a, b, a^{-1}, b^{-1} – это слово от a и b . При этом если есть сочетание aa или bb , то его можно сократить. Поскольку $(ab)^n = e$, среди слов $abab \dots$ различными являются слова длины $0, 1, 2, \dots, 2n - 1$. С другой стороны $ba = b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$. Значит, $(ba)^n = e$ и среди слов $ba \dots$ также различными являются слова длины $0, 1, 2, \dots, 2n - 1$. Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} b &= (ab)^n b = (ab)^{n-1} a; \\ ba &= (ab)^n ba = (ab)^{n-1}; \\ &\vdots \\ (ba)^{n-1} b &= (ab)^n (ba)^{n-1} b = a. \end{aligned}$$

Таким образом, все слова вида $ba \dots$ представляются словами вида $abab \dots$. Значит, $|H| \leq 2n$. Отсюда следует, что $D_n = H$.

ЛЕКЦИЯ 6

Проблема равенства слов. Пусть S – некоторое множество. И пусть даны два конечных слова от букв $s_i \in S$ и s_i^{-1} . Возникает вопрос: эквивалентны ли эти два слова, то есть дают ли они один и тот же элемент свободной группы $\langle S \rangle$? Этот вопрос называется проблемой равенства слов.

Один из способов решить проблему равенства слов – это определить некий канонический вид, к которому можно привести каждое слово, причём этот вид должен быть единственным. Если этот подход будет реализован, то для проверки эквивалентности двух слов нужно оба слова привести к каноническому виду и сравнить результаты.

Напомним, что слова называются эквивалентными, если от одного до другого можно добраться следующими элементарными преобразованиями: можно сокращать подряд идущие пары символов типа xx^{-1} или $x^{-1}x$, а также можно приписывать в любое место слова пары символов xx^{-1} или $x^{-1}x$. Преобразования первого типа назовем *сокращениями*, а второго – *приписываниями*. Любое слово можно сокращениями привести к *несократимому виду*, то есть к виду, в котором нет подряд идущих сочетаний вида xx^{-1} и $x^{-1}x$.

Теорема 10. В каждом классе эквивалентности есть только одно несократимое слово.

Доказательство. Пусть есть два различных несократимых слова u и v , которые эквивалентны. Рассмотрим цепочку элементарных преобразований, переводящих u в v . Пусть в этой цепочке есть сокращение, идущее после приписывания. Докажем, что эту пару можно заменить либо на пару сокращение, а затем приписывание, либо убрать. В самом деле если ни один из сокращённых символов не совпадает с только что приписанными, то можно поменять эти две операции. Останется случай, когда было приписывание xx^{-1} , а затем сокращение, использующее один или оба из приписанных символов. Но тогда в результате этих двух операций слово не поменялось и можно

эту пару убрать. Назовем такую замену одной пары другой (или убирание пары) перестройкой.

Для цепочки элементарных преобразований рассмотрим сумму позиций, на которых стоят сокращения. (То есть в цепочке "сокращение, приписывание, приписывание, сокращение, сокращение" сокращения стоят на 1, 4 и 5 местах и сумма равна 10.) При перестройке данная сумма уменьшается. Следовательно, не возможно бесконечное число перестроек и за конечное число перестроек мы достигнем цепочки, в которой сначала идут несколько сокращений, а затем несколько приписываний. Однако слово u несократимо. Значит, цепочка не могла начинаться с сокращений. Тогда она состоит только из приписываний. Но это противоречит несократимости слова v . $\square$

Замечание 6. Можно поставить аналогичный вопрос равенства слов не только в свободной группе, но и в группе с соотношениями. В этом случае слова эквивалентны не только, когда они различаются цепочкой сокращений и приписываний, но также можно вставлять в любое место или убирать любые элементы из $N(r_1, \dots, r_k)$, где r_i – соотношения. Оказывается, что проблема равенства слов может стать гораздо сложнее, более того она не всегда разрешима. Более точно, существует конечно порожденная группа с конечным числом соотношений, в которой проблема равенства слов алгоритмически не разрешима.

Внутреннее прямое произведение подгрупп.

Напомним, что прямым произведением групп K и H мы называли множество пар $(k, H) \mid k \in K, h \in H$ с покомпонентным умножением. Назовем такое прямое произведение *внешним*.

Определение 24. Пусть K и H – нормальные подгруппы в группе G такие, что $K \cap H = \{e\}$ и G порождается подгруппами K и H . Тогда G называется *внутренним прямым произведением* подгрупп H и K .

Лемма 15. Пусть K и H – подгруппы в G . Следующие условия эквивалентны:

- 1) Группа G – это внутреннее прямое произведение подгрупп K и H .
- 2) Каждый элемент $g \in G$ единственным образом представляется в виде произведения $g = kh$, $k \in K$, $h \in H$. При этом если $g_1 = k_1h_1$ и $g_2 = k_2h_2$, то $g_1g_2 = k_1k_2h_1h_2$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Так как группа G порождена подгруппами K и H и подгруппа H нормальна, то по лемме 11 любой элемент $g \in G$ представляется в виде $g = kh$. Предположим, что $k_1h_1 = k_2h_2$. Тогда, умножая слева на k_2^{-1} , а справа – на h_1^{-1} , получаем $k_2^{-1}k_1 = h_2h_1^{-1} \in K \cap H$. Следовательно, $k_2^{-1}k_1 = h_2h_1^{-1} = e$, то есть $k_1 = k_2$ и $h_1 = h_2$. Итак, представление $g = kh$ единственно.

Пусть теперь $g_1 = k_1h_1$ и $g_2 = k_2h_2$. Докажем, что $h_1k_2h_1^{-1}k_2^{-1} = e$. В самом деле так как K – нормальная подгруппа, $h_1k_2h_1^{-1} = \hat{k} \in K$, с другой стороны так как H – нормальна подгруппа, $k_2h_1^{-1}k_2^{-1} = \hat{h} \in H$. Тогда

$$h_1k_2h_1^{-1}k_2^{-1} = h_1\hat{h} = \hat{k}k_2^{-1} \in K \cap H = \{e\}.$$

Итак, $h_1k_2h_1^{-1}k_2^{-1} = e$. Значит, $h_1k_2 = k_2h_1$. Но тогда $g_1g_2 = k_1h_1k_2h_2 = k_1k_2h_1h_2$.

$2 \Rightarrow 1$. Рассмотрим $g \in G$, $k \in K$. Тогда $g = k_0h_0$, $k = ke$. Рассмотрим $\bar{g} = k_0^{-1}h_0^{-1}$. По правилу умножения $g\bar{g} = k_0k_0^{-1}h_0h_0^{-1} = e$, значит, $\bar{g} = g^{-1}$. Получаем $ghg^{-1} = (k_0h_0)(ke)(k_0^{-1}h_0^{-1})$. По правилу умножения это равно $(k_0kk_0^{-1})(h_0eh_0^{-1}) = k$. Значит, K – нормальная подгруппа. Аналогично доказывается, что H – нормальная подгруппа.

Пусть $s \in K \cap H$. Тогда $s = se = es$ – два представления s в виде kh . Так как такое представление должно быть единственно, $s = e$. То есть $K \cap H = \{e\}$.

Осталось заметить, что раз любой элемент g равен kh , то G – группа, порожденная подгруппами K и H . $\square$

Замечание 7. Результат предыдущей леммы можно интерпретировать так: внутреннее прямое произведение подгрупп изоморфно внешнему произведению этих подгрупп. Для установления этого изоморфизма нужно отождествить kh и (k, h) .

С другой стороны любое внешнее прямое произведение может быть интерпретировано как внутреннее. Действительно, рассмотрим во внешнем прямом произведении $K \times H$ подгруппы $K' = \{(k, e)\} \cong K$ и $H' = \{(e, h)\} \cong H$. Тогда $K \times H$ является внутренним прямым произведением подгрупп K' и H' .

В дальнейшем мы не будем различать внутренние и внешние прямые произведения и будем использовать единый термин "прямое произведение".

Теорема 11 (Теорема о факторизации прямого произведения). Пусть $G_1, \dots, G_k$ – группы. В каждой группе G_i фиксируем нормальную подгруппу H_i . Тогда $H_1 \times \dots \times H_k$ является нормальной подгруппой $G_1 \times \dots \times G_k$ и

$$(G_1 \times \dots \times G_k) / (H_1 \times \dots \times H_k) \cong G_1 / H_1 \times \dots \times G_k / H_k.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi: G_1 \times \dots \times G_k \rightarrow G_1 / H_1 \times \dots \times G_k / H_k,$$

$$\varphi: (g_1, \dots, g_k) \mapsto (g_1 H_1, \dots, g_k H_k).$$

Легко видеть, что φ – это сюръективный гомоморфизм, ядро которого совпадает с $H_1 \times \dots \times H_k$. Это доказывает оба утверждения. $\square$

Лемма 16 (Критерий инъективности гомоморфизма). Пусть $\varphi: G \rightarrow G'$ – гомоморфизм групп. Тогда φ инъективен если и только если $\text{Кер } \varphi = \{e\}$.

Доказательство. Пусть $g \neq e \in \text{Кер } \varphi$. Тогда $\varphi(g) = e = \varphi(e)$, то есть гомоморфизм φ не инъективен.

Пусть теперь φ не инъективен. Тогда есть два элемента $x \neq y \in G$ такие, что $\varphi(x) = \varphi(y)$. Но тогда $\varphi(xy^{-1}) = e$. Следовательно, $xy^{-1} \neq e \in \text{Кер } \varphi$. $\square$

Замечание 8. Так же как в случае абелевой группы мы используем аддитивные обозначения, если группы A и B абелевы, то прямое произведение групп A и B мы будем называть *прямой суммой* и обозначать $A \oplus B$.

Теорема 12 (Китайская теорема об остатках). Пусть m и n – натуральные числа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\text{НОД}(m, n) = 1$;
- 2) $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Рассмотрим

$$\varphi: \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n, \quad \varphi(u) = (u \bmod m, u \bmod n).$$

Докажем, что φ – изоморфизм. Из определения видно, что φ переводит сложение в сложение, то есть является гомоморфизмом.

Пусть $u \in \text{Кер } \varphi$. Тогда u делится и на m , и на n . Значит, так как m и n взаимно просты, u делится на mn . То есть u равен нулю по модулю mn . Следовательно, $\text{Кер } \varphi = \{0\}$, а значит, по лемме 16 гомоморфизм φ инъективен. Но поскольку $|\mathbb{Z}_{mn}| = |\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n|$ из инъективности φ следует его биективность. Итак, φ – изоморфизм.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть $\text{НОД}(m, n) = d > 1$. Тогда для любого элемента $(a, b) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ выполнено

$$\frac{mn}{d}(a, b) = \text{НОК}(m, n)(a, b) = (0, 0).$$

Значит, любой элемент в $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ имеет порядок не больше $\frac{mn}{d}$, то есть нет элемента из $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$, порядок которого равен mn . Значит, группа $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ не циклическая и не изоморфна $\mathbb{Z}_{mn}$. $\square$

ЛЕКЦИЯ 7

Для абелевых групп будем использовать аддитивную терминологию. Операцию будем обозначать "+" и называть сложением. Нейтральный элемент называем нулем. При этом степень g^k элемента g , будет обозначаться kg .

Замечание 9. То, что абелева группа A порождается подмножеством $S \subset A$ означает, что каждый элемент $a \in A$ представляется в виде $a = k_1 s_1 + \dots + k_n s_n$, где $s_i \in S$, $k_i \in \mathbb{Z}$.

Мы почти всегда будем ограничиваться рассмотрением только конечно порожденных абелевых групп, то есть таких групп A , для которых множество S может быть выбрано конечным.

Определение 25. Система элементов S абелевой группы A называется *линейно независимой* (над $\mathbb{Z}$), если из того, что $k_1 s_1 + \dots + k_n s_n = 0$ для некоторых $k_i \in \mathbb{Z}$, $s_i \in S$, следует что все k_i равны нулю.

Определение 26. *Базис* абелевой группы – это линейно независимая система порождающих этой группы.

Заметим, что не у всякой группы есть базис. Например, у группы $\mathbb{Z}_n$ базиса нет, так как для любой системы $\{s_1, \dots, s_k\}$ выполнено $ns_1 = 0$, что противоречит линейной независимости этой системы.

Определение 27. Пусть в абелевой группе A есть базис $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$. Тогда группа A называется *свободной абелевой группой*. Будем обозначать эту группу

$$\langle e_1, \dots, e_n, \dots \rangle_a$$

Если базис конечен и имеет мощность n , то будем говорить, что A – свободная абелева группа ранга n и обозначать $\text{rk } A = n$.

Задача 6. Докажите, что

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle_a = \langle e_1, \dots, e_n \mid e_i e_j e_i^{-1} e_j^{-1}, 1 \leq i < j \leq n \rangle.$$

Лемма 17. Ранг свободной абелевой группы определен однозначно.

Доказательство. Пусть в некоторой группе A есть два базиса $\{e_1, \dots, e_m\}$ и $\{e'_1, \dots, e'_n\}$, причем $n > m$. Так как $\{e_1, \dots, e_m\}$ – базис, каждый элемент e'_j выражается через $\{e_1, \dots, e_m\}$ с целыми коэффициентами: $e'_j = c_{1j} e_1 + \dots + c_{mj} e_m$. Можно собрать все коэффициенты c_{ij} в целочисленную матрицу C размера $m \times n$ такую, что

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_m)C.$$

Интерпретируем столбцы $C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$ матрицы C как векторы из пространства $\mathbb{Q}^m$ строк с рациональными коэффициентами длины m . Тогда столбцы – это n векторов в m -мерном векторном пространстве. По основной лемме о линейной зависимости

столбцы C линейно зависимы, то есть есть рациональные числа $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$ не все равные нулю такие, что

$$\frac{p_1}{q_1} C^{(1)} \dots + \frac{p_n}{q_n} C^{(n)} = 0.$$

Домножим это равенство на произведение знаменателей и получим

$$k_1 C^{(1)} \dots + k_n C^{(n)} = 0$$

для некоторых $k_i \in \mathbb{Z}$ не всех равных нулю. Но тогда $k_1 e'_1 + \dots + k_n e'_n = 0$, что противоречит линейной независимости $\{e'_1, \dots, e'_n\}$. $\square$

Замечание 10. Пусть $F = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_a$. Тогда $F = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$.

Предложение 6. Подгруппа L свободной абелевой группы F ранга n – это свободная абелева группа ранга $m \leq n$.

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по n .

База индукции $n = 1$. $F \cong \mathbb{Z}$. По теореме 2(2) подгруппа в $\mathbb{Z}$ имеет вид $k\mathbb{Z}$. При $k \neq 0$ это свободная абелева группа ранга 1. Если же $k = 0$ получаем свободную абелеву группу ранга ноль.

Шаг индукции. Пусть для $n < k$ утверждение доказано. Рассмотрим

$$P = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle_a \subset F.$$

Обозначим $B = P \cap L$. Так как P – свободная группа ранга $n - 1$, по предположению индукции $B \subset P$ – свободная абелева группа ранга не более $n - 1$. Если $L \subset P$, то $L = B$ – свободная абелева группа ранга не более $n - 1$. Пусть $L \neq B$. Тогда найдется $l \in L$ такой, что $l = k_1 e_1 + \dots + k_n e_n$, где $k_n \neq 0$. Будем считать, что l – элемент из L с минимальным модулем последней координаты k_n . Пусть $s = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n \in L$. Поделим t_n на k_n с остатком: $t_n = qk_n + r$, где $|r| < |k_n|$. Получаем

$$s - ql = (t_1 - qk_1)e_1 + \dots + re_n \in L.$$

Так как l – элемент L с минимальной по модулю последней координатой, получаем $r = 0$. Значит, $s - ql \in B$. То есть $s \in B \oplus \langle l \rangle$. Получаем $L = B \oplus \langle l \rangle$ – свободная абелева группа ранга $\text{rk } B + 1 \leq n$. $\square$

Теорема 13 (Универсальное свойство свободной абелевой группы). Пусть A – абелева группа с образующими $a_1, \dots, a_n$. Тогда существует сюръективный гомоморфизм

$$\varphi: \langle x_1, \dots, x_n \rangle_a \rightarrow A,$$

причем $\varphi(x_i) = a_i$.

Доказательство. Подходит гомоморфизм определенный по правилу

$$\varphi(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n) = k_1 a_1 + \dots + k_n a_n.$$

$\square$

Применяя теорему о гомоморфизме, получаем следствие.

Следствие 4. Каждая конечно порожденная абелева группа изоморфна факторгруппе свободной абелевой группы по некоторой подгруппе (ядру гомоморфизму φ).

Опишем все базисы данной свободной абелевой группы через один фиксированный базис.

Определение 28. Обозначим через $GL_n(\mathbb{Z})$ множество целочисленных матриц $n \times n$ с определителем ± 1 .

Легко проверить, что $GL_n(\mathbb{Z})$ – подгруппа в $GL(\mathbb{Q})$.

Предложение 7. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ базис свободной абелевой группы F . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ – базис F ;
- 2) $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где $C \in GL_n(\mathbb{Z})$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Поскольку $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис F , каждый вектор выражается через $\{e_1, \dots, e_n\}$. Значит, $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где C – некоторая целочисленная матрица $n \times n$. Аналогично $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)D$ для некоторой целочисленной матрицы D . Тогда $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)CD$. Так как $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис, получаем $CD = E$. Тогда $\det C \det D = 1$ и при этом $\det C, \det D \in \mathbb{Z}$. Значит, $\det C = \pm 1$.

$2 \Rightarrow 1$. Применяя формулу через алгебраические дополнения, получаем, что обратная матрица C^{-1} также является целочисленной. Для любого $f \in F$ выполняется

$$f = (e_1 \ \dots \ e_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = (e'_1 \ \dots \ e'_n) C^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом любой элемент f выражается через $\{e'_1, \dots, e'_n\}$. Так как матрица C невырожденная, система $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ линейно независима над $\mathbb{Z}$. Значит, это базис F . $\square$

Примерами матриц из $GL_n(\mathbb{Z})$ являются матрицы следующих элементарных преобразований:

- 1) прибавление одной строки к другой с целым коэффициентом,
- 2) смена двух строк местами
- 3) умножение строки на -1 .

Таким образом, переходя от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(e_1, \dots, e_n)C$ мы можем делать данные элементарные преобразования с данным базисом. Назовем данные элементарные преобразования базиса *допустимыми*.

Рассмотрим пару состоящую из свободной абелевой группы $F = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_a$ и ее подгруппы $L = \langle y_1, \dots, y_m \rangle_a$, $m \leq n$. Тогда

$$(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n)P,$$

где P – целочисленная матрица размера $n \times m$.

Теорема 14 (Теорема о согласованных базисах). *Существует такой базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ группы F и такие натуральные числа $u_1, \dots, u_m$, что u_i делится на u_j при $i > j$, и система $\{u_1 e_1, \dots, u_m e_m\}$ является базисом L .*

Доказательство. Будем делать элементарные преобразования с базисами группы F и подгруппы L . Пусть $(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_n)C$, $(y'_1, \dots, y'_m) = (y_1, \dots, y_m)D$, тогда равенство $(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n)P$ дает $(y'_1, \dots, y'_m) = (x'_1, \dots, x'_n)C^{-1}PD$. При умножении P слева на матрицу C^{-1} и справа на матрицу D происходят допустимые элементарные преобразования со строками и столбцами P . Далее утверждение теоремы следует из следующей леммы.

Лемма 18. Пусть P – целочисленная матрица $n \times m$. Делая допустимые элементарные преобразования со строками и столбцами P можно привести P к виду

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Причем если $i > j$, то u_i делится на u_j .

Доказательство леммы. Если не все коэффициенты матрицы равны нулю, то перестановкой строк и столбцов можно поставить на место p_{11} ненулевой элемент с минимальным модулем. Далее будем уменьшать минимальный модуль ненулевого элемента пока это будет возможно.

Случай 1. В первой строке матрицы P есть элемент p_{1i} не делящийся на p_{11} . Поделим p_{1i} на p_{11} с остатком: $p_{1i} = qp_{11} + r$, $0 < |r| < |p_{11}|$. Прибавим первый столбец к i -му с коэффициентом $-q$. На месте p_{1i} получим r . Таким образом мы уменьшили модуль минимального по модулю ненулевого элемента.

Случай 2. В первом столбце матрицы P есть элемент p_{i1} не делящийся на p_{11} . Прибавляя 1-ю строку к i -ой с нужным коэффициентом получаем элемент с модулем меньше $|p_{11}|$ в первом столбце.

Случай 3. Все элементы первой строки и первого столбца делятся на p_{11} , но есть p_{ij} , не делящийся на p_{11} . Прибавим первую строку и первый столбец к остальным так, чтобы все элементы, кроме p_{11} стали равны нулю. При этом p_{ij} все равно не будет делиться на p_{11} (к нему прибавилось нечто делящееся на p_{11}). Прибавим i -ю строку к первой и попадем в случай 1.

Так как бесконечно уменьшать модуль минимального ненулевого элемента мы не можем, рано или поздно получится ситуация, когда все элементы p_{ij} делятся на p_{11} . Тогда можно сделать все элементы первой строки и первого столбца нулевыми. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2m} \\ 0 & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

Далее работаем аналогичным образом с матрицей без первой строки и первого столбца. При этом элементарные преобразования строк со 2 по n -ю и столбцов со 2-го по m -ый не меняет того, что все элементы p_{ij} делятся на u_1 . В итоге получаем нужный вид матрицы. $\square$

Замечание 11. Легко доказать, что при допустимых элементарных преобразованиях НОД всех элементов матрицы не меняется. Поэтому u_1 равен НОД всех элементов матрицы. $\square$

Следствие 5. Любая конечно порожденная абелева группа изоморфна

$$\mathbb{Z}_{u_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{u_m} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z},$$

где u_i делится на u_j , если $i > j$.

Доказательство. Пусть A – конечно порожденная абелева группа. По теореме 13 существует сюръективный гомоморфизм φ из свободной абелевой группы F конечного ранга n в группу A . Применим теорему о согласованных базисах к паре $\text{Ker } \varphi \subset F$. Получаем

$$F = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_m \rangle \oplus \langle e_{m+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle,$$

$$\text{Ker } \varphi = \langle u_1 e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle u_m e_m \rangle \oplus \{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}.$$

Применяя теорему о факторизации прямого произведения, получаем

$$A \cong F / \text{Ker } \varphi \cong \langle e_1 \rangle / \langle u_1 e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_m \rangle / \langle u_m e_m \rangle \oplus \langle e_{m+1} \rangle / \{0\} \oplus \dots \cong$$

$$\cong \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{u_m} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}.$$

□

ЛЕКЦИЯ 8

Докажем следующую полезную лемму.

Лемма 19. Пусть $G_1, \dots, G_l$ – группы. Рассмотрим $\bar{g} = (g_1, \dots, g_l) \in G_1 \times \dots \times G_l$. Тогда если среди g_i есть элемент бесконечного порядка, то $\bar{g}$ имеет бесконечный порядок. Если же все элементы g_i конечного порядка, то

$$\text{ord } \bar{g} = \text{НОК}(\text{ord } g_1, \dots, \text{ord } g_l).$$

Доказательство. Заметим, что $k\bar{g} = (kg_1, \dots, kg_l)$. А значит, $k\bar{g} = 0$ тогда и только тогда, когда $kg_i = 0$ для всех i , то есть k делится на $\text{ord } g_i$ для всех i . Если существует j такое, что $\text{ord } g_j = \infty$, то такого k не существует, и следовательно, $\text{ord } \bar{g} = \infty$. Если же все порядки g_i конечны, то минимальное k равно наименьшему общему кратному этих порядков. □

По следствию 5 каждая конечно порожденная абелева группа A изоморфна

$$\mathbb{Z}_{u_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{u_m} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z},$$

где u_i делится на u_j , если $i > j$. Назовем такую форму записи A *первой канонической формой абелевой группы*.

Определение 29. Абелева группа называется примарной, если она имеет порядок p^a , где p – простое число, $a \in \mathbb{N}$.

Применим китайскую теорему об остатках к группе $\mathbb{Z}_u$. Пусть $u = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Тогда

$$\mathbb{Z}_u \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}.$$

Применив это к каждому слагаемому первой канонической формы абелевой группы A и переупорядочив слагаемые, получим *вторую каноническую форму группы A*

$$\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_{m_1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_{m_2}}} \oplus \dots \oplus$$

$$\oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_{m_k}}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Здесь каждое простое число может несколько раз встречаться в одной и той же степени в качестве порядка циклического слагаемого.

Наша цель – доказать что первая и вторая канонические формы действительно канонические (то есть одну группу нельзя представить двумя различными способами в такой форме). Начнем со второй формы.

Теорема 15 (Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп). *Пусть A – конечно порожденная абелева группа. Тогда A изоморфна прямой сумме конечного числа циклических групп. Каждая из этих циклических групп либо является бесконечной циклической группой, либо примарной циклической группой. И такое разложение единственно с точностью до перестановки прямых слагаемых.*

Доказательство. Существование такого разложения в прямую сумму уже доказано (это и есть вторая каноническая форма). Пусть есть два таких разложения одной и той же группы A . Прежде всего докажем, что количество бесконечных циклических слагаемых в обоих разложениях одинаково. Для этого определим следующую подгруппу

Определение 30. Подгруппа кручения $\text{Tor } A$ (абелевой) группы A – это подгруппа, состоящая из всех элементов конечного порядка.

Прежде всего нужно объяснить, что множество элементов конечного порядка действительно является подгруппой. Для этого заметим, что если $ka = 0$ и $mb = 0$, то $km(a + b) = 0$. То есть множество $\text{Tor } A$ замкнуто относительно сложения. Кроме того $k(-a) = 0$, что означает замкнутость $\text{Tor } A$ относительно взятия противоположного. Осталось заметить, что $0 \in \text{Tor } A$.

Из леммы 19 следует, что элементы конечного порядка в разложении (1) имеют вид $(x_1, \dots, x_N, 0, \dots, 0)$, где в конечных слагаемых идут любые элементы $x_1, \dots, x_N$, а в бесконечных слагаемых все элементы – нули. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{Tor } A &= \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_{m_1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_{m_2}}} \oplus \dots \oplus \\ &\quad \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_{m_k}}} \oplus \{0\} \oplus \dots \oplus \{0\} \subset \\ &\subset \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_{m_1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{b_{m_2}}} \oplus \dots \oplus \\ &\quad \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{c_{m_k}}} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} = A. \end{aligned}$$

По теореме о факторизации прямого произведения

$$A/\text{Tor } A \cong \{0\} \oplus \dots \oplus \{0\} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^r.$$

Таким образом, факторгруппа $A/\text{Tor } A$ – это свободная абелева группа ранга r , где r равно количеству прямых слагаемых, изоморфных $\mathbb{Z}$ в разложении (1). Поскольку определение подгруппы кручения не зависит от разложения и ранг свободной абелевой группы определен однозначно, получаем, что если для группы A есть две вторых канонических формы, то количество прямых слагаемых $\mathbb{Z}$ в них одинаково. Назовем это число *рангом* (абелевой) группы A .

Разложение (1) состоит из второй канонической формы группы $\text{Tor } A$, к которой добавлены $\text{rk } A$ слагаемых $\mathbb{Z}$. Для того, чтобы доказать, что две вторых канонических формы группы A совпадают, осталось доказать, что для группы $\text{Tor } A$ нет двух различных вторых канонических формы. Для этого рассмотрим следующие подгруппы в $\text{Tor } A$.

Определение 31. Пусть p – простое число. Подгруппа p -кручения (абелевой) группы A – это подгруппа $\text{Tor}_p A$, состоящая из всех элементов группы $a \in A$ таких, что $\text{ord } a = p^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Опять-таки нужно доказать, что $\text{Tor}_p A$ – подгруппа A . Для этого заметим, что если $\text{ord } a = p^k$, $\text{ord } b = p^m$, то $p^{\max\{k,m\}}(a+b) = 0$, а значит, $\text{ord } (a+b)$ делит $p^{\max\{k,m\}}$. Таким образом, множество $\text{Tor}_p A$ замкнуто относительно сложения. Кроме того $\text{ord } (-a) = p^k$, то есть $\text{Tor}_p A$ замкнуто относительно взятия противоположного элемента. Так как $0 \in \text{Tor}_p A$, это подмножество является подгруппой в A . Легко видеть, что подгруппа p -кручения содержится в подгруппе кручения.

Из леммы 19 следует, что элемент $\bar{a} = (a_1, \dots, a_N)$ содержится в $\text{Tor}_p A$ тогда и только тогда, когда порядок каждого a_i является степенью p . В разложении (1) каждый элемент a_i содержится в некоторой примарной циклической группе. Если $a_i \in \mathbb{Z}_{p^\alpha}$, то порядок a_i равен степени p . Если же $a_i \in \mathbb{Z}_{q^\beta}$ для некоторого простого $q \neq p$, то порядок a_i равен степени p тогда и только тогда, когда $a_i = 0$. Итак, подгруппа $\text{Tor}_p A$ изоморфна прямой сумме тех слагаемых разложения (1), порядок которых равен p^α для всех $\alpha \in \mathbb{N}$. Например,

$$\text{Tor}_{p_1} A \cong \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{a_{m_1}}}.$$

Таким образом, вторая каноническая форма A состоит из прямой суммы вторых канонических форм $\text{Tor}_{p_i} A$ для всех p_i (нетривиальные разложения будут только для p_i , делящих порядок A) и $\text{rk} A$ слагаемых $\mathbb{Z}$.

Если есть две различные вторые канонические формы у некоторой группы A , то существует некоторое простое число p , для которого у группы $B = \text{Tor}_p A$ есть две различные вторые канонические формы.

Пусть H – абелева группа, а n – натуральное число. Тогда $nH = \{nh \mid h \in H\}$ – подгруппа H . Проверим это. Возьмем два элемента nh_1 и nh_2 из nH . Тогда

$$nh_1 + nh_2 = n(h_1 + h_2) \in nH.$$

При этом $-(nh) = (-n)h \in nH$ и $0 = n0 \in nH$. Таким образом мы доказали, что nH – группа. Легко видеть, что $n(H_1 \oplus H_2) = nH_1 \oplus nH_2$. Теперь рассмотрим случай, когда $H \cong \mathbb{Z}^\alpha$, а $n = p^\beta$ для некоторого простого p . Из описания подгрупп в циклической группе следует, что при $\beta < \alpha$ подгруппа $p^\beta \mathbb{Z}_{p^\alpha}$ циклическая, порождена p^β и изоморфна $\mathbb{Z}_{p^{\alpha-\beta}}$. Если же $\beta \geq \alpha$, то $p^\beta \mathbb{Z}_{p^\alpha} = \{0\}$. Заметим, что

$$p^\beta \mathbb{Z}_{p^\alpha} / p^{\beta+1} \mathbb{Z}_{p^\alpha} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \text{при } \beta < \alpha, \\ \{0\}, & \text{при } \beta \geq \alpha. \end{cases}$$

Пусть теперь во второй канонической форме группы $B = \text{Tor}_p A$ содержится s_1 прямых слагаемых $\mathbb{Z}_p$, s_2 прямых слагаемых $\mathbb{Z}_{p^2}$, s_3 прямых слагаемых $\mathbb{Z}_{p^3}$ и т.д. Тогда B/pB изоморфно прямой сумме $s_1 + s_2 + \dots$ копий $\mathbb{Z}_p$, то есть $|B/pB| = p^{s_1+s_2+\dots}$. Аналогично pB/p^2B изоморфно $s_2 + s_3 + \dots$ копий $\mathbb{Z}_p$, то есть $|pB/p^2B| = p^{s_2+s_3+\dots}$. Продолжая таким образом, получаем $p^l B/p^{l+1}B$ изоморфно $s_{l+1} + s_{l+2} + \dots$ копий $\mathbb{Z}_p$, то есть $|p^l B/p^{l+1}B| = p^{s_{l+1}+s_{l+2}+\dots}$. Отсюда

$$p^{s_l} = \frac{|p^{l-1}B/p^lB|}{|p^lB/p^{l+1}B|}.$$

То есть

$$s_l = \log_p \frac{|p^{l-1}B/p^lB|}{|p^lB/p^{l+1}B|}.$$

Таким образом, все s_i определены однозначно, то есть вторая каноническая форма группы B определена однозначно. Как доказано выше, из этого следует, что вторая каноническая форма группы A определена однозначно. Теорема 15 доказана. $\square$

Следствие 6. *Первая каноническая форма конечно порожденной абелевой группы A определена однозначно.*

Доказательство. Пусть есть абелева группа A , у которой есть две различные первые канонические формы Φ_1 и Φ_2 . Так как ранг свободной группы $A/\text{Тог } A$ определен однозначно, количество прямых слагаемых $\mathbb{Z}$ в этих разложениях одинаково. Значит, эти формы отличаются конечными слагаемыми. Тогда найдется простое число p и его степень k такие, что количество u_i , делящихся на p^k в одной форме (можно считать, что в Φ_1) строго больше, чем в другой (в Φ_2). Напомним, что пользуясь китайской теоремой об остатках можно из первой канонической формы получить вторую. Но тогда во второй канонической форме, полученной из Φ_1 будет больше слагаемых $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ с условием $\alpha \geq k$, чем во второй канонической форме, полученной из Φ_2 . Это противоречит теореме 15. $\square$

Определение 32. Экспонента группы G – это минимальное натуральное число k такое, что для любого $g \in G$ выполнено $g^k = e$. Если такого числа не существует, то будем говорить, что экспонента G равна бесконечности. Обозначать экспоненту будем $\text{exp } G$.

Лемма 20. *Экспонента группы равна наименьшему общему кратному порядков элементов. (Имеется в виду, что если есть элемент бесконечного порядка или нет конечного общего кратного у всех порядков, то экспонента бесконечна.)*

Доказательство. Если $g^k = e$, то k делится на $\text{ord } g$. Так как $\text{exp } G$ – минимальное натуральное число, что $g^{\text{exp } G} = e$ для всех $g \in G$, получаем, что $\text{exp } G$ – минимальное натуральное число, делящееся на порядки всех элементов. $\square$

Предложение 8 (Критерий цикличности абелевой группы). *Пусть A – конечная абелева группа. Группа A циклическая тогда и только тогда, когда $\text{exp } A = |A|$.*

Доказательство. Пусть A циклическая. Тогда есть элемент, порядок которого равен $|A|$, то есть $\text{exp } A \geq |A|$. Порядки всех элементов – делители $|A|$, значит, $\text{exp } A \leq |A|$. Получаем $\text{exp } A = |A|$.

Пусть наоборот, $\text{exp } A = |A| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, где p_i – простые числа. Так как $\text{exp } A$ – наименьшее общее кратное порядков всех элементов, для каждого $1 \leq j \leq m$ найдется $b_j \in A$ такое, что $\text{ord } b_j = p_j^{k_j} t$, где t не делится на p_j . Обозначим $a_j = t b_j$. Легко видеть, что $\text{ord } a_j = p_j^{k_j}$. Рассмотрим элемент $a = a_1 + \dots + a_m$, докажем, что его порядок равен $|A|$. Для этого заметим, что $|A|a = 0$ по теореме Лагранжа, но

$$\begin{aligned} \frac{|A|}{p_j} a &= p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j-1} \dots p_m^{k_m} (a_1 + \dots + a_j + \dots + a_m) = \\ &= 0 + \dots + 0 + p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j-1} \dots p_m^{k_m} a_j + 0 + \dots + 0 = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j-1} \dots p_m^{k_m} a_j \neq 0. \end{aligned}$$

А значит, простое число p_j входит в $\text{ord } a$ именно в степени k_j . Так как это выполняется для всех j , порядок a равен $|A|$. Следовательно, группа A циклическая. $\square$

ЛЕКЦИЯ 9

Напомним, что полем называется множество F с двумя бинарными операциями: сложением и умножением, удовлетворяющим следующим аксиомам.

- 1) $\forall a, b, c \in F: (a + b) + c = a + (b + c),$
- 2) $\exists 0 \in F: \forall x \text{ выполнено } 0 + x = x + 0 = x,$

- 3) $\forall x \in F \exists (-x) : x + (-x) = (-x) + x = 0$,
- 4) $\forall a, b \in F : a + b = b + a$,
- 5) $\forall a, b, c \in F : (a + b)c = ac + bc$,
- 6) $\forall a, b, c \in F : (ab)c = a(bc)$,
- 7) $\forall a, b \in F : ab = ba$,
- 8) $\exists e \in F : \forall x$ выполнено $ex = xe = x$,
- 9) $\forall x \neq 0 \in F \exists x^{-1} : xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Поле является частным случаем кольца. Мы ранее говорили, что для произвольного кольца R можно рассмотреть группу $(R^\times, \cdot)$, состоящую из всех обратимых по умножению элементов, с операцией умножения. Для поля $F^\times = F \setminus \{0\}$ и группа $(F^\times, \cdot)$ называется *мультипликативной группой поля F* .

Предложение 9. *Конечная подгруппа в мультипликативной группе поля циклическая.*

Доказательство. Пусть G – конечная подгруппа в мультипликативной группе поля $F^\times$. Предположим, что G не является циклической. Так как $F^\times$ коммутативна, ее подгруппа G также коммутативна. По предложению 8 экспонента G не равна $|G|$. Значит, $\exp G = k < |G|$. Тогда в поле F у многочлена $x^k - e$ как минимум $|G|$ корней (все элементы группы G являются такими корнями). Однако ненулевой многочлен не может иметь в поле больше корней, чем его степень. В самом деле это следует из того, что, если $f(c) = 0$, то по теореме Безу $f(x)$ делится на $x - c$. Получаем противоречие. Следовательно, исходное предположение, что G не циклическая не верно. $\square$

Очевидным следствием предыдущего предложения является следующее утверждение.

Следствие 7. *Мультипликативная группа конечного поля циклическая.*

Определение 33. Пусть G – группа, а X – множество. Действием группы G на множестве X называется отображение $\alpha : G \times X \rightarrow X$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) для любых $g, h \in G$ и $x \in X$ выполнено $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$,
- 2) для любого $x \in X$ выполнено $\alpha(e, x) = x$.

Если задано действие группы G на множестве X , то говорят, что G *действует* на X и обозначают $G \curvearrowright X$ (в некоторой литературе обозначают $G : X$). При этом $\alpha(g, x)$ называется действием (или применением) элемента g к элементу x , и $\alpha(g, x)$ обозначается $g \cdot x$. В таких обозначениях свойства действия из определения 33 принимают вид:

- 1) для любых $g, h \in G$ и $x \in X$ выполнено $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$,
- 2) для любого $x \in X$ выполнено $e \cdot x = x$.

Пример 10. Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда есть естественное действие симметрической группы S_n на X , заданное по формуле $\sigma \cdot i = \sigma(i)$.

То, что это действие сводится к проверкам

- 1) $\sigma \cdot (\delta \cdot i) = \sigma(\delta(i)) = (\sigma \circ \delta)(i) = (\sigma \circ \delta) \cdot i$,
- 2) $\text{id} \cdot i = \text{id}(i) = i$.

Пример 11. Пусть K – поле. Тогда зададим действие $\text{GL}(K) \curvearrowright K^n$ по следующей

формуле. Для $A \in \text{GL}(K)$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ положим $A \cdot Y = AY$. Доказательство

того, что это действие сводится к проверкам

$$1) A \cdot (B \cdot Y) = ABY = (AB) \cdot Y,$$

$$2) E \cdot Y = EY = Y.$$

Такое действие называется тавтологическим.

Важный частный случай действий – это действия группы на себе, то есть случай, когда $X = G$. Есть три естественных действия $G \curvearrowright G$.

Пример 12. 1) Действие G на себе левыми сдвигами.

По определению $g \cdot \bar{g} = g\bar{g}$.

Тогда $g_1 \cdot (g_2 \cdot \bar{g}) = g_1 g_2 \bar{g} = (g_1 g_2) \cdot \bar{g}$ и $e \cdot \bar{g} = e\bar{g} = \bar{g}$.

2) Действие G на себе правыми сдвигами.

По определению $g \cdot \bar{g} = \bar{g}g^{-1}$. Проверим, что это действие.

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot \bar{g}) = g_1 \cdot (\bar{g}g_2^{-1}) = (\bar{g}g_2^{-1})g_1^{-1} = \bar{g}(g_1g_2)^{-1} = (g_1g_2) \cdot \bar{g},$$

$$e \cdot \bar{g} = \bar{g} \cdot e = \bar{g}.$$

3) Действие G на себе сопряжениями.

По определению $g \cdot \bar{g} = g\bar{g}g^{-1}$. Проверим, что это действие.

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot \bar{g}) = g_1 \cdot (g_2 \bar{g} g_2^{-1}) = g_1 g_2 \bar{g} g_2^{-1} g_1^{-1} = (g_1 g_2) \bar{g} (g_1 g_2)^{-1} = (g_1 g_2) \cdot \bar{g}.$$

$$e \cdot \bar{g} = e\bar{g}e^{-1} = \bar{g}.$$

Замечание 12. Заметим, что нельзя определить правое действие (действие правыми сдвигами) таким образом $g \cdot \bar{g} = \bar{g}g$, так как при этом

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot \bar{g}) = g_1 \cdot (\bar{g}g_2) = \bar{g}g_2g_1, \quad (g_1g_2) \cdot \bar{g} = \bar{g}g_1g_2.$$

Если группа G не коммутативная, то найдутся два элемента g_1 и g_2 такие, что

$$\bar{g}g_2g_1 \neq \bar{g}g_1g_2.$$

Заметим, что при фиксированном $g \in G$ отображение $\alpha_g: X \rightarrow X$, $\alpha_g(x) = \alpha(g, x)$ является биекцией. В самом деле, легко убедиться, что $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$, при этом $\alpha_e = \text{id}$. Это означает, что $\alpha_{g^{-1}}$ – обратное отображение к α_g . Таким образом, мы получаем гомоморфизм φ_α из G в $S(X)$. Напомним, что $S(X)$ – это группа биекций $X \rightarrow X$. Гомоморфизм φ_α определяется следующим образом: $\varphi_\alpha(g) = \alpha_g$.

Наоборот, если дан гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow S(X)$, то можно определить действие α_φ группы G на X следующим образом: $g \cdot x = \varphi(g)(x)$.

Лемма 21. Отображения $\Phi: \alpha \mapsto \varphi_\alpha$ и $\Psi: \varphi \mapsto \alpha_\varphi$ являются взаимно обратными и, следовательно, устанавливают биекцию между действиями G на X и гомоморфизмами из G в $S(X)$.

Доказательство. Пусть β – некоторое действие G на X . Имеем $\Psi \circ \Phi(\beta) = \Psi(\varphi_\beta)$. По определению, это действие устроено по правилу $g \cdot x = \varphi_\beta(g)(x)$. С другой стороны по определению $\varphi_\beta(g) = \beta_g$, то есть $\varphi_\beta(g)(x) = \beta_g(x) = \beta(g, x)$. Таким образом $\Psi \circ \Phi(\beta) = \beta$, то есть $\Psi \circ \Phi = \text{id}$.

Пусть теперь $\varphi: G \rightarrow S(X)$ – гомоморфизм. Тогда $\Phi \circ \Psi(\varphi) = \Phi(\alpha_\varphi)$. По определению Φ имеем $\Phi(\alpha_\varphi)(g)(x) = \alpha_\varphi(g, x) = \varphi(g)(x)$. Так как это верно для любого x и для любого g имеем $\Phi \circ \Psi(\varphi) = \varphi$, то есть $\Phi \circ \Psi = \text{id}$. $\square$

Следующие два определения играют центральную роль в теории действий.

Определение 34. Пусть G действует на X и $x \in X$. Орбитой элемента x называется множество $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$.

Определение 35. Пусть G действует на X и $x \in X$. Стабилизатором элемента x называется множество $\text{St}(x) = G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Лемма 22. Орбиты – это классы эквивалентности, и следовательно, орбиты либо не пересекаются, либо совпадают.

Доказательство. Докажем, что отношение " $x \sim y$ если x лежит в орбите Gy " является отношением эквивалентности.

- 1) Рефлексивность. $x \sim x$ так как $e \cdot x = x$, а значит, $x \in Gx$.
- 2) Симметричность. Если $x \sim y$, то найдется $g \in G$ такое, что $g \cdot y = x$. Значит, $g^{-1} \cdot x = y$, то есть $y \sim x$.
- 3) Транзитивность. Пусть $x \sim y$ и $y \sim z$. Тогда $x = g \cdot y$, $y = \bar{g} \cdot z$. Тогда $x = (g\bar{g}) \cdot z$. Следовательно, $x \sim z$. $\square$

Лемма 23. Стабилизатор $\text{St}(x)$ является подгруппой в G .

Доказательство. Пусть $g, h \in \text{St}(x)$. Тогда $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$, то есть $gh \in \text{St}(x)$, а значит, множество $\text{St}(x)$ замкнуто относительно умножения.

Если $g \in \text{St}(x)$, то $g \cdot x = x$. Подействуем на обе части этого равенства элементом g^{-1} . Получим $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot x$. Но $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = e \cdot x = x$. Значит, $g^{-1} \in \text{St}(x)$, то есть $\text{St}(x)$ замкнут относительно взятия обратного.

Осталось заметить, что единица группы лежит в стабилизаторе любого элемента. $\square$

Пусть G группа и H – ее подгруппа. Пусть $g \in G$. Через gHg^{-1} мы обозначаем множество $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$. Отображение $h \mapsto ghg^{-1}$ устанавливает изоморфизм (биекцию, переводящую умножение в умножение) между H и gHg^{-1} . Следовательно, gHg^{-1} – подгруппа, изоморфная H . Эта подгруппа называется подгруппой, сопряженной к H .

Лемма 24. Пусть $y = g \cdot x$. Тогда $\text{St}(y) = g\text{St}(x)g^{-1}$. (Стабилизаторы элементов одной орбиты сопряжены.)

Доказательство. Докажем, что $\text{St}(y) \supseteq g\text{St}(x)g^{-1}$. Пусть $h \in \text{St}(x)$. Тогда

$$(ghg^{-1}) \cdot y = (ghg^{-1}) \cdot (g \cdot x) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = y.$$

Но аналогично, так как $x = g^{-1} \cdot y$, имеем $\text{St}(x) \supseteq g^{-1}\text{St}(y)g$. А значит,

$$g\text{St}(x)g^{-1} \supseteq \text{St}(y).$$

Так как доказаны включения в обе стороны, получаем $\text{St}(y) = g\text{St}(x)g^{-1}$. $\square$

Следствие 8. Если группа G абелева, то стабилизаторы элементов в одной орбите совпадают.

Теорема 16. Существует биекция между множеством левых смежных классов группы G по подгруппе $\text{St}(x)$ и элементами орбиты Gx .

Доказательство. Определим отображение ψ , которое сопоставляет смежному классу $g\text{St}(x)$ элемент орбиты $g \cdot x$. Прежде всего нужно проверить корректность этого отображения, то есть что если $g\text{St}(x) = h\text{St}(x)$, то $g \cdot x = h \cdot x$. В самом деле $g\text{St}(x) = h\text{St}(x)$ тогда и только тогда, когда $h^{-1}g \in \text{St}(x)$, то есть $g = hs$, где $s \in \text{St}(x)$. Получаем $g \cdot x = h \cdot (s \cdot x) = h \cdot x$. Итак, ψ определено корректно.

Пусть $\psi(g\text{St}(x)) = \psi(h\text{St}(x))$, тогда $g \cdot x = h \cdot x$. Подействуем на последнее равенство элементом h^{-1} . Получим $(h^{-1}g) \cdot x = x$, то есть $h^{-1}g \in \text{St}(x)$. Тогда $g\text{St}(x) = h\text{St}(x)$, то есть ψ – инъекция.

То, что ψ сюръективно следует из того, что в элемент орбиты $g \cdot x$ переходит смежный класс $g\text{St}(x)$. $\square$

Следствие 9. Пусть G – конечная группа. Тогда $|G| = |Gx| \cdot |\text{St}(x)|$.

С помощью только что доказанной формулы посчитаем количество элементов в группе вращений куба $\text{Sym}_+(K)$. Данная группа состоит из всех движений $\mathbb{R}^3$, сохраняющих ориентацию. (Так как центр куба остается неподвижен, то движение, сохраняющее куб является линейным преобразованием. Ориентацию сохраняют те движения, определитель которых равен 1.)

Предложение 10. Порядок группы $\text{Sym}_+(K)$ равен 24.

Доказательство. Рассмотрим куб K с вершинами $ABCD A'B'C'D'$. Есть естественное действие $\text{Sym}_+(K)$ на множестве $\{A, B, C, D, A'B'C'D'\}$. В группе $\text{Sym}_+(K)$ содержится вращение относительно оси, соединяющей две противоположные грани. С помощью композиции таких вращений можно перевести любую вершину в любую другую. Значит, орбита точки A состоит из 8 точек. По следствию 9 получаем

$$|\text{Sym}_+(K)| = |\text{Sym}_+(K)A| \cdot |\text{St}(A)| = 8 \cdot |\text{St}(A)|.$$

Осталось найти $|H|$, где $H = \text{St}(A)$. Пусть вершины, смежные с A – это B, D и A' . Получаем естественное действие H на множестве $\{B, D, A'\}$. Легко видеть, что в группе H лежат вращения относительно диагонали AC' на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Они переводят B в D и A' соответственно. Значит, действие H на $\{B, C, D\}$ имеет единственную орбиту $|HB| = 3$. При этом по следствию 9 получаем

$$|H| = |HB| \cdot |\text{St}_H(B)| = 3|\text{St}_H(B)|.$$

(Здесь мы используем индекс в $\text{St}_H(B)$, чтобы подчеркнуть, что это стабилизатор при действии группы H , а не при действии группы G .) Осталось найти $|\text{St}_H(B)|$. Пусть $\xi \in |\text{St}_H(B)|$. Тогда $\psi(A) = A$, $\psi(B) = B$. Поскольку смежные с A вершины – это B, D и A' , получаем, что либо $\psi(D) = D$ и $\psi(A') = A'$, либо $\psi(D) = A'$ и $\psi(A') = D$. Но если $\psi(D) = A'$ и $\psi(A') = D$, то ψ меняет ориентацию. Следовательно, $\psi(A) = A$, $\psi(B) = B$, $\psi(D) = D$ и $\psi(A') = A'$. То есть ψ сохраняет 4 точки не лежащие в одной плоскости. Значит, $\psi = \text{id}$. Следовательно, $|\text{St}_H(B)| = 1$. Таким образом

$$|\text{Sym}_+(K)| = 8 \cdot |\text{St}(A)| = 24 \cdot |\text{St}_H(B)| = 24.$$

$\square$

ЛЕКЦИЯ 10

Определение 36. Ядро неэффективности действия $\alpha: G \times X \rightarrow X$ – это множество $\text{Ker } \alpha = \{g \in G \mid \forall x \in X : g \cdot x = x\}$. Если ядро действия состоит только из единицы группы G , то действие называется эффективным.

Из определения следует, что ядро неэффективности совпадает с пересечением всех стабилизаторов всех элементов $x \in X$.

Лемма 25. *Ядро неэффективности действия α является нормальной подгруппой в группе G .*

Доказательство. Утверждение следует из того, что $\text{Ker } \alpha$ совпадает с ядром гомоморфизма $\text{Ker } \varphi_\alpha$. $\square$

Предложение 11. *Действия группы G на X с ядром неэффективности, содержащим H , находятся в биекции с действиями G/H на X .*

Доказательство. Пусть $\varphi_\alpha: G \rightarrow S(X)$ – гомоморфизм, соответствующий α . При этом $H \subset \text{Ker } \alpha$. Рассмотрим $\psi: G/H \rightarrow S(X)$, $\psi(gH) = \varphi(g)$. Проверим, что ψ определено корректно, то есть что если $gH = \bar{g}H$, то $\varphi(g) = \varphi(\bar{g})$. В самом деле если $gH = \bar{g}H$, то $g^{-1}\bar{g} = h \in H$. Тогда $\bar{g} = gh$ и $\varphi(\bar{g}) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(g)$.

Отображение ψ является гомоморфизмом, так как

$$\psi((g_1H) \cdot (g_2H)) = \psi(g_1g_2H) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(g_1H)\psi(g_2H).$$

Гомоморфизм ψ соответствует действию α_ψ группы G/H на X .

Напротив, если дано действие $G/H \curvearrowright X$, то ему соответствует гомоморфизм $\psi: G/H \rightarrow S(X)$. Если взять композицию с каноническим гомоморфизмом

$$\pi_H: G \rightarrow G/H,$$

то получим гомоморфизм $\varphi = \psi \circ \pi_H: G \rightarrow S(X)$. Последний гомоморфизм соответствует действию G на X . Поскольку $\text{Ker } \pi_H = H$, ядро ψ содержит H , а значит, H содержится в ядре неэффективности полученного действия G на X . $\square$

Определение 37. Действия $\alpha: G \times X \rightarrow X$ и $\beta: G' \times Y \rightarrow Y$ называются *изоморфными*, если существуют изоморфизм $\varphi: G \rightarrow G'$ и биекция $\psi: X \rightarrow Y$ такие, что $\beta(\varphi(g), \psi(x)) = \psi(\alpha(g, x))$ для любых $g \in G$ и $x \in X$.

Определение 38. Действие $G \curvearrowright X$ называется *транзитивным*, если у него ровно одна орбита, то есть если для любых $x, y \in X$ существует $g \in G$ такое, что $g \cdot x = y$.

Как уже было упомянуто, ядро неэффективности действия – это пересечение всех стабилизаторов. Действие эффективно, если пересечение всех стабилизаторов состоит только из единицы.

Определение 39. Действие называется *свободным*, если стабилизатор каждого элемента $x \in X$ тривиален, то есть равен $\{e\}$.

Теорема 17. *Любое свободное транзитивное действие группы G на некотором множестве изоморфно действию G на себе левыми сдвигами.*

Доказательство. Пусть $\beta: G \times X \rightarrow X$ – свободное транзитивное действие. Пусть $\alpha: G \times G \rightarrow G$, $g \cdot g' = gg'$ – действие G правыми сдвигами на себе. Рассмотрим любой элемент $y \in X$. Определим отображение $\psi: G \rightarrow X$ по формуле

$$\psi(g) = \beta(g, y) = g \cdot y.$$

Докажем, что ψ – биекция. Сюръективность ψ следует из того, что действие β транзитивно. Проверим инъективность. Пусть $\psi(g) = \psi(g')$. Тогда $g \cdot y = g' \cdot y$. Следовательно, $(g^{-1}g) \cdot y = y$, то есть $g^{-1}g' \in \text{St}(y)$. Но так как действие β свободно, получаем $\text{St}(y) = \{e\}$, а значит, $g^{-1}g' = e$, то есть $g = g'$.

Положим $\varphi: G \rightarrow G$ тождественным отображением $\varphi = \text{id}$. Тогда

$$\beta(\varphi(g), \psi(\bar{g})) = \beta(g, \bar{g} \cdot y) = g \cdot (\bar{g} \cdot y) = (g\bar{g}) \cdot y.$$

С другой стороны

$$\psi(\alpha(g, \bar{g})) = \psi(g\bar{g}) = (g\bar{g}) \cdot y.$$

Таким образом,

$$\beta(\varphi(g), \psi(\bar{g})) = \psi(\alpha(g, \bar{g})),$$

то есть действия α и β изоморфны. $\square$

Теперь рассмотрим действие группы G на себе сопряжениями. Орбиты и стабилизаторы при этом действии имеют отдельные названия. Орбиты называются *классами сопряженности*, а стабилизаторы – *централизаторами*. Класс сопряженности элемента $g \in G$ обозначается $C(g)$, а централизатор элемента g обозначается $\text{Cent}(g)$. Следствие 9, примененное к действию G на себе сопряжениями, дает формулу $|C(g)| \cdot |\text{Cent}(g)| = |G|$.

Замечание 13. Заметим, что и класс сопряженности и централизатор зависят не только от самого элемента g , но и от того, элементом какой группы он рассматривается. Путаница может произойти, например, в случае, когда в группе G есть подгруппа H . Тогда любой элемент $h \in H$ можно рассматривать как элемент G , а можно – как элемент H . Чтобы различать эти ситуации будем там, где это необходимо писать группу в качестве индекса. При этом может так случиться, что $C_G(g) \neq C_H(g)$ и $\text{Cent}_G(g) \neq \text{Cent}_H(g)$. Однако легко видеть, что всегда имеются включения в одну сторону: $C_H(g) \subset C_G(g)$, $\text{Cent}_H(g) \subset \text{Cent}_G(g)$.

Следующее утверждение следует непосредственно из определений.

Лемма 26. *Подгруппа $H \subset G$ является нормальной тогда и только тогда, когда H состоит из классов сопряженности. (Имеется в виду, что каждый класс сопряженности либо целиком содержится в H , либо целиком содержится в дополнении к H .)*

Доказательство. Подгруппа H нормальна тогда и только тогда, когда для любых $h \in H$ и $g \in G$ выполнено $ghg^{-1} \in H$. То есть для любого $h \in H$ выполнено $C(h) \subset H$. $\square$

Для того, чтобы описывать нормальные подгруппы (и для других целей) бывает удобно явно описать классы сопряженности в группе. Сделаем это для группы S_n . Назовем *ит* цикловой структурой перестановки $\sigma \in S_n$ неупорядоченный набор длин независимых циклов этой перестановки.

Лемма 27. *Пусть $\sigma \in S_n$. Тогда $C_{S_n}(\sigma)$ состоит из всех перестановок $\delta \in S_n$ с такой же цикловой структурой.*

Доказательство. Пусть разложение σ в независимые циклы имеет вид

$$\sigma = (a_1, \dots, a_k)(b_1, \dots, b_m) \dots (c_1, \dots, c_l).$$

Возьмем $\pi \in S_n$. Имеем:

$$\pi\sigma\pi^{-1} = (\pi(a_1), \dots, \pi(a_k))(\pi(b_1), \dots, \pi(b_m)) \dots (\pi(c_1), \dots, \pi(c_l)). \quad (*)$$

В самом деле $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ – биекция. А значит, любой элемент $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ равен $\pi(j)$. С другой стороны $\pi\sigma\pi^{-1}(\pi(j)) = \pi(\sigma(j))$. Отсюда следует приведенная выше формула (*). Видно, что перестановка $\pi\sigma\pi^{-1}$ имеет ту же цикловую структуру, что и σ .

Напртив, пусть

$$\delta = (a'_1, \dots, a'_k)(b'_1, \dots, b'_m) \dots (c'_1, \dots, c'_l)$$

имеет такую же цикловую структуру, что и σ . Положим

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_k b_1 \dots b_m \dots c_1 \dots c_l \\ a'_1 \dots a'_k b'_1 \dots b'_m \dots c'_1 \dots c'_l \end{pmatrix}.$$

Тогда $\pi \sigma \pi^{-1} = \delta$. □

Задача 7. Найдите все нормальные подгруппы в S_4 .

Задача 8. Пусть $\sigma \in A_n$.

а) Докажите, что $C_{S_n}(\sigma)$ либо совпадает с $C_{A_n}(\sigma)$, либо есть объединение двух классов сопряженности в A_n .

б) Как по перестановке $\sigma \in A_n$ определить, какой из случаев пункта а) реализуется?

Теорема 18 (Теорема Кэли). Пусть G – конечная группа порядка n . Тогда G изоморфна некоторой подгруппе в S_n .

Доказательство. Пусть $|G| = n$. Рассмотрим α – действие G на себе левыми сдвигами. Это действие соответствует гомоморфизму $\varphi_\alpha: G \rightarrow S(G) \cong S_n$. (Явно этот гомоморфизм задается по правилу: элемент g переходит в биекцию $\bar{g} \mapsto g\bar{g}$ из G в G .) При этом ядро φ_α равно ядру неэффективности α . Но легко видеть, что $\text{St}(e) = \{e\}$, а значит, $\text{Ker } \alpha = \{e\}$. Значит, φ_α задает вложение G в S_n . □

Пусть задано действие G на X . Для $g \in G$ обозначим через X^g множество

$$X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Лемма 28 (Лемма Бернсайда). Пусть конечная группа G действует на множестве X тогда количество орбит этого действия равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Доказательство. Посчитаем двумя различными способами количество пар (x, g) таких, что $g \cdot x = x$. Обозначим множество таких пар за M . Тогда с одной стороны

$$|M| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

С другой стороны

$$|M| = \sum_{x \in X} |\text{St}(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}. \quad (**)$$

В последней сумме заметим, что суммирование по всему X можно разбить на суммирование по непересекающимся орбитам. Пусть O – одна из орбит. Тогда

$$\sum_{x \in O} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{x \in O} \frac{1}{|O|} = 1$$

Значит, самое правое выражение в $(**)$ равно $|G|$ умножить на количество орбит. Приравнявая ко второму выражению для $|M|$ и разделив на $|G|$, получаем утверждение леммы. □

Замечание 14. Если множество X бесконечно, то обе части равенства из леммы Бернсайда будут бесконечны. В самом деле, количество орбит бесконечно так как количество элементов в каждой орбите не больше $|G|$. Выражение $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$ бесконечно, так как $X^e = X$ – бесконечное множество.

Пример 13. Решим с помощью леммы Бернсайда такую задачу: сколько существует различных способов покрасить ребра проволочного правильного 7-угольника в 3 цвета? (Имеется в виду, что этот проволочный 7-угольник находится в трехмерном пространстве и две покраски одинаковы, если их можно совместить.)

Рассмотрим закрепленные покраски 7-угольника, то есть занумеруем ребра и для каждого ребра будет 3 варианта покрасить его. Таких закрепленных покрасок существует 3^7 . На множестве X закрепленных покрасок действует группа D_7 и нам нужно посчитать количество орбит (так как фраза "окраски одинаковы, если их можно совместить" означает, что покраски считаются одинаковыми, если лежат в одной орбите).

Чтобы применить формулу из леммы Бернсайда нужно посчитать $|X^g|$ для всех $g \in D_7$. Для $g = e$ имеем $|X^e| = 3^7$. Для любого нетривиального поворота легко видеть, что X^g состоит только из одноцветных закрепленных покрасок, а значит, $|X^g| = 3$. Для симметрии все вершины 7-угольника разбиваются на 3 пары симметричных вершин и одну, лежащую на оси симметрии. Количество покрасок из $|X^g|$ равно 3^4 так как каждую пару надо покрасить в один цвет. В итоге количество орбит равно

$$\frac{1}{14}(3^7 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3^4) = 198.$$

Теперь разберемся более подробно с группой $\text{Sym}_+(K)$ вращений куба.

Предложение 12. Группа вращений куба изоморфна S_4 .

Доказательство. Группа $\text{Sym}_+(K)$ действует на множестве диагоналей куба. (Очевидно, что любой элемент этой группы переводит диагонали в диагонали, то есть производит перестановку диагоналей. При этом композиция элементов дает композицию перестановок.) То есть мы имеем гомоморфизм $\varphi: \text{Sym}_+(K) \rightarrow S_4$. Поскольку $|\text{Sym}_+(K)| = |S_4| = 24$, для того, чтобы доказать, что φ – изоморфизм достаточно доказать, что φ – сюръекция. Пусть K – середина ребра AA' , а L – середина ребра CC' . Рассмотрим ξ вращение на π вокруг KL . Ясно, что $\xi \in \text{Sym}_+(K)$.

$$\xi(A) = A', \xi(A') = A, \xi(C) = C', \xi(C') = C, \xi(B) = D', \xi(D') = B, \xi(B') = D, \xi(D) = B'.$$

Значит, применение ξ меняет местами диагонали AC' и $A'C$ и оставляет на месте диагонали BD' и $B'D$. То есть образ ξ в S_4 – это транспозиция. Но аналогично мы можем доказать, что любая транспозиция лежит в образе φ . Поскольку S_4 порождается транспозициями, φ – сюръекция. $\square$

Аналогично докажем другую геометрическую реализацию группы S_4 . Напомним, что группа симметрий фигуры – это группа всех движений пространства (для плоской фигуры – плоскости), сохраняющих данную фигуру. (Группа симметрий не состоит только из симметрий относительно плоскостей/прямых!)

Предложение 13. Группа симметрий правильного тетраэдра изоморфна S_4 .

Доказательство. Группа симметрий правильного тетраэдра действует на множестве его вершин (их 4). получаем гомоморфизм из этой группы в S_4 . Этот гомоморфизм

инъективен, так как у него тривиальное ядро. В самом деле, если некое преобразование плоскости лежит в ядре, то оно оставляет на месте вершины тетраэдра (4 точки, не лежащие в одной плоскости), а значит, это тождественное преобразование. Теперь докажем сюръективность данного гомоморфизма. Рассмотрим симметрию относительно плоскости, проходящей через ребро тетраэдра и середину противоположного ребра. Данная симметрия меняет ровно 2 вершины. Значит, в образе нашего гомоморфизма лежат транспозиции. Так как они порождают S_4 , гомоморфизм сюръективен. Итак, мы построили гомоморфизм из группы симметрий правильного тетраэдра в S_4 , который является биекцией, то есть изоморфизмом. $\square$