Центр, смежные классы, нормальные подгруппы, фактор-группа

Определение 1. Пусть G - группа. *Центр* группы G есть подмножество $Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in G gz = zg\}$.

Задача 1. Докажите, что $Z(G)$ - подгруппа в G.

Определение 2. Обозначим через D_n группу всех движений плоскости, сохраняющих фиксированный правильный n-угольник.

Задача 2. Из каких элементов состоит D_n? Найдите $Z(\mathrm{D}_n)$

Определение 3. Таблица умножения (таблица Кэли) группы - это квадратная таблица по строкам и столбцам которой стоят элементы группы, а в пересечении строки и столбца стоит произведение соответствующих элементов (слева тот, который по строке).

Пример 1. Таблица умножения (на самом деле сложения!) в группе $\mathbb{Z}_2$:

	0	**1**
0	0	1
1	1	0

Определение 4. Группа кватернионов Q_8 - это группа состоящая из 8 элементов $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ с таблицей умножения:

	1	**−1**	**i**	**−i**	**j**	**−j**	**k**	**−k**
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
−1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
−i	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
−j	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
−k	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Задача 3. Найдите центр группы Q_8.

Задача 4. Докажите, что группа Q_8 изоморфна подгруппе в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, остоящей из матриц:

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Найти центр группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Определение 5. Левый смежный класс группы G по подгруппе H – это множество $gH = \{gh \mid h \in H\}$.

Теорема 1. *(Теорема Лагранжа) Порядок подгруппы делит порядок группы.*

Следствие 1. *Порядок элемента делит порядок группы.*

Задача 6. Опишите все группы простого порядка.

Определение 6. Подгруппа H называется *нормальной*, если для каждого g выполнено $gHg^{-1} = H$.

Определение 7. *Факторгруппа* группы G по нормальной подгруппе H – это множество левых смежных классов с операцией $g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H$.

Задача 7. Опишите смежные классы и найдите факторгруппу группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $n\mathbb{Z}$.

Задача 8. Докажите, что подгруппа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ нормальна в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, найдите факторгруппу.

Задача 9. Докажите, что подгруппа A_n нормальна в группе S_n. Найдите факторгруппу.

Задача 10. Докажите, что подгруппа V_4 нормальна в группе A_4. Найдите факторгруппу.

Задача 11. Доказать, что подгруппа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали нормальна в группе невырожденных верхнетреугольных матриц. Найти факторгруппу.

Задача 12. а) Приведите пример не нормальной подгруппы.

б) Приведите пример вложенных групп $A \subset B \subset C$ таких, что A нормальна в B, B нормальна в C, но A не является нормальной в C.