Группы, полугруппы, изоморфизмы, порядки.

Определение 1. n-*арная* операция α на множестве M - это отображение $\alpha\colon M\times M\times\ldots\times M\to M$ из n-ой декартовой степени множества M в множество M.

Бинарную операцию обычно обозначают умножением, то есть используют обозначение $a\cdot b:=\alpha(a,b)$.

Определение 2. *Группоид* - это множество с бинарной операцией.
Полугруппа - это множество с ассоциативной бинарной операцией.
Моноид - это полугруппа с нейтральным элементом.
Группа - моноид, у которого каждый элемент обратим.
Абелева группа - это группа с коммутативной операцией.

Замечание 1. Пусть G - группа. Отображение $G\to G$ $g\mapsto g^{-1}$ можно рассматривать как ещё одну унарную операцию на G.

Задача 1. Привести пример моноида, который не является группой и полугруппы, которая не является моноидом.

Задача 2. Пусть M - множество. X - множество подмножеств M. Какую структуру образует X с операцией пересечения.

Задача 3. Пусть M - множество. X - множество подмножеств M. Какую структуру образует X с операцией симметрической разности.

Задача 4. Существует ли конечный моноид, не являющийся группой?

Задача 5. Существует ли конечная полугруппа, не являющаяся моноидом?

Определение 3. Подгруппа (подполугруппа, подмоноид) данной группы (полугруппы, моноида) - это подмножество, которое относительно той же операции является группой (полугруппой, моноидом).

Для того, чтобы проверить, что подмножество подполугруппа достаточно проверить замкнутость относительно умножения. Подмоноид - ещё и что нейтральный элемент там лежит. Подгруппа - что замкнута относительно умножения и взятия обратного (и не пустая).

Задача 6. Образуют ли невырожденные симметрические матрицы $n\times n$ группу относительно матричного умножения?

Задача 7. Образуют ли ортогонольные матрицы $n\times n$ группу относительно матричного умножения?

Определение 4. Порядок группы G - это количество элементов в ней. Порядок элемента $g\in G$ - это минимальная натуральная степень k такая что $g^k=e$ или бесконечность, если такого k не существует.

Задача 8. Найти порядок перестановки $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\5&3&2&1&4&7&9&6&8&10\end{pmatrix}$

Задача 9. Найти порядок матрицы $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ в группе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ и в группе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$.

Задача 10. Пусть G - абелева группа. Обозначим через $G[m]$ множество элементов $g \in G$ таких что $g^m = e$. Докажите, что $G[m]$ - подгруппа в G. Верно ли это утверждение, если G - не обязательно абелева группа.

Задача 11. Для каждого элемента g группы G выполнено $g^2 = e$. Доказать, что группа G коммутативна.

Задача 12. Сколько элементов порядка 2 в группе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$?

Определение 5. Пусть G и H – группы (полугруппы, моноиды). Тогда отображение $\psi\colon G \to H$ называется ***гомоморфизмом***, если оно переводит операцию в G в операцию в H. То есть $\psi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\psi(g_2)$.

Изоморфизм – это биективный гомоморфизм.

Задача 13. Пусть M - множество. X - множество подмножеств M. Докажите, что полугруппы $(X, \cap)$ и $(X, \cup)$ изоморфны.

Задача 14. Какие из перечисленных групп изоморфны между собой: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$.