Прямые произведения. Конечнопорождённые группы.

Задача 1. Разлагаются ли в прямое произведение подгрупп группы
а) $\mathbb{Z}$
б)S_3
в) A_4
г) S_4
д) Q_8

Задача 2. Доказать, что $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ тогда и только тогда, когда $(m,n)=1$.

Задача 3. Доказать, что если в абелевой группе подгруппы $A_1,\ldots,A_k$ еют конечные попарно взаимно простые порядки, то их сумма является прямой.

Задача 4. Найти $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2)$

Задача 5. а) Доказать, что подгруппа конечно порождённой абелевой группы конечно порождена.
б) Верно ли это утверждение для абелевых моноидов?
в) Верно ли это утверждение для некоммутативных групп?

Теорема 1. *Конечно порождённая абелева группа изоморфна конечной прямой сумме свободных циклических групп (изоморфных $\mathbb{Z}$) и конечных примарных циклических групп (изоморфных $\mathbb{Z}_{p^a}$ для некоторого простого p). Причём такое разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых.*

Задача 6. а) Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_{18}$?
б) Разбить на классы изоморфных групп $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{36}\oplus\mathbb{Z}_{50}$, $\mathbb{Z}_{3600}$, $\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_{15}\oplus\mathbb{Z}_{40}$, $\mathbb{Z}_{40}\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_{30}$.

Задача 7. а) Перечислить все с точностью до изоморфизма абелевы группы порядка 200.
б) Сколько с точностью до изоморфизма групп порядка n. (Не совсем хороший ответ, то есть не в элементарных функциях.)

Задача 8. Есть ли в абелевой группе $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{16}$ подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_4$?

Номера из задачника 6044, 6045, 6042(a).