Фактор-группа, теорема о гомоморфизме, коммутант.

Теорема 1. *(Теорема о гомоморфизме.)*

Пусть G и H группы. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon G \to H$. Тогда $\mathrm{Ker}\varphi$ *есть нормальная подгруппа в G,* $\mathrm{Im}\varphi$ *– подгруппа в H, причём* $G/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$.

Задача 1. Найдите с помощью теоремы о гомоморфизме фактор группу $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Задача 2. а) Докажите, что подгруппа $\mathrm{Int}(G)$ внутренних автоморфизмов группы G нормальна в группе $\mathrm{Aut}(G)$ всех автоморфизмов G.

б) Докажите, что $Z(G)$ – нормальная подгруппа в G. Докажите, что

$$G/Z(G) \cong \mathrm{Int}(G).$$

Задача 3. * Пусть S – полугруппа. Введите понятия аналогичные нормальной подгруппе и фактор группе для полугрупп и сформулируйте (и докажите) теорему о гомоморфизме для полугрупп.

Задача 4. Пусть U – множество комплексных чисел с модулем 1; H_n – множество комплексных чисел с аргументами $2\pi k/n, k \in \mathbb{Z}$; $U_n = H_n \cap U$. Докажите, что

а) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$;
б) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times \cong U$;
в) $\mathbb{C}^\times/U \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$;
г) $U/U_n \cong U$;
д) $\mathbb{C}^\times/U_n \cong \mathbb{C}^\times$;
е) $\mathbb{C}^\times/H_n \cong U$
ж) $H_n/(\mathbb{R}_+, \cdot) \cong U_n$;
з) $H_n/U_n \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Задача 5. * Доказать, что $S_4/V_4 \cong S_3$.

Определение 1. Коммутатор элементов x и y из G – это $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Коммутант – это подгруппа, порождённая коммутаторами.

Задача 6. Доказать, что G' – нормальная подгруппа, фактор группа по которой абелева. Причём она минимальна среди подгрупп с этим свойством.

Задача 7. Найти коммутанты групп S_3, A_4, S_4, Q_8.

Задача 8. Докажите, что комму тант группы GL_n равен SL_n.

Задача 9. Найти коммутант группы D_n.

Задача 10. Найти коммутант группы невырожденных верхнетреугольных матриц $n \times n$.