Лекция 1

Определение 1. Пусть G – некоторое множество. *n-арной операцией* на множестве G называется отображение

$$G \times \ldots \times G \to G$$

из n-ой декартовой степени множества G в множество G.

Рассмотрим бинарную операцию $*$ на множестве G:

$$G \times G \to G, \qquad (g_1, g_2) \to g_1 * g_2.$$

Определение 2. Непустое множество G с фиксированной бинарной операцией $*$ называется *группоидом*.

Рассмотрим следующие условия (аксиомы) на операцию $*$.

A1. Ассоциативность. Для любых элементов $a, b, c \in G$ выполнено $(a*b)*c = a*(b*c)$.

A2. Существование нейтрального элемента. Существует такой элемент $e \in G$, что для любого $g \in G$ выполняется $eg = ge = g$.

A3. Существование обратного элемента. Для каждого элемента $g \in G$ существует элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

A4. Коммутативность. Для любых элементов $a, b \in G$ выполнено $a*b = b*a$.

Накладывая на операцию $*$ различные множества условий, мы будем получать различные алгебраические структуры.

Определение 3. Если $*$ удовлетворяет условию A1, то G называется *полугруппой*.

Если $*$ удовлетворяет условиям A1 и A2, то G называется *моноидом*.

Если $*$ удовлетворяет условиям A1 и A2 и A3, то G называется *группой*.

Условие A4 добавляет к названию структуры слово абелев (или, что то же самое, коммутативный). Так условия A1 и A4 задают *абелеву (коммутативную) полугруппу*, условия A1, A2 и A4 задают *абелев (коммутативный) моноид*, условия A1, A2, A3 и A4 задают *абелеву (коммутативную) группу*.

Обозначение 1. Если не очевидно, какая операция на множестве G имеется в виду, то будем использовать обозначение $(G, *)$ для множества G с операцией $*$.

Упражнение 1. Рассмотрим аксиому, являющуюся "половиной"аксиомы A2.

$A2'$: Существует такой элемент $e \in G$, что для любого $g \in G$ выполняется $eg = g$. Докажите, что если структура $(G, *)$ удовлетворяет условиям $A1, A2'$ и $A3$, то G является группой.

Задача 1. Рассмотрим аксиому, являющуюся "половиной"аксиомы A3.

$A3'$: Для каждого элемента $g \in G$ существует элемент $g^{\vee} \in G$ такой, что $g * g^{\vee} = e$.

Существует ли структура $(G, *)$, удовлетворяющая условиям $A1, A2$ и $A3'$, но не являющаяся группой.

Рассмотрим некоторые элементарные следствия из аксиом.

Лемма 1. Простые следствия из аксиом.

1) (Обобщенная ассоциативность) Пусть $(G, *)$ – полугруппа. И пусть $g_1, \ldots, g_k \in G$. Тогда как бы ни были расставлены скобки в выражении $g_1 * g_2 * \ldots * g_k$ результат будет одинаковым.

2) В моноиде есть единственная единица.

3) В группе для каждого элемента есть единственный обратный.

4) Пусть $(G, *)$ – группа. Пусть $a, b \in G$. Тогда если $a * b = e$, то $b = a^{-1}$. Аналогично если $b * a = e$, то $b = a^{-1}$.

5) Пусть $(G, *)$ – группа, $a, b \in G$. Тогда $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

6) Пусть $(G, *)$ – группа, $g \in G$. Тогда $(g^{-1})^{-1} = g$.

Доказательство. 1) Докажем это утверждение индукцией по k.

База индукции $k = 3$. В этом случае обобщенная ассоциативность совпадает с ассоциативностью, то есть с аксиомой A1.

Шаг индукции. Предположим, что для $k < n$ данное утверждение уже доказано. Докажем его для $k = n$. Среди всех расстановок скобок есть стандартная (при ней действия выполняются справа-налево):

$$(\dots(g_1 * g_2) * g_3) * \dots * g_{n-1}) * g_n = g.$$

Достаточно доказать, что результат, который получается при произвольной расстановке скобок, совпадает с g. Фиксируем некоторую расстановку скобок. Для этой расстановки скобок есть последнее действие, которое даҷт операцию от двух скобок. Длиной скобки назовҷм количество g_i, входящих в нее. Докажем, что результат совпадает с g индукцией по длине правой скобки (обозначим эту длину s).

База второй индукции $s = 1$. Наша расстановка скобок имеет вид $(\dots) * g_n$. По предположению первой индукции в левой скобке можно расставить скобки произвольным образом. В том числе стандартным образом. Но тогда в целом мы получим стандартную рассановку скобок. Значит, результат при нашей расстановке скобок совпадает с результатом при стандартной расстановке скобок.

Шаг второй индукции. Пусть при $s < m$ утверждение доказано ($m \geq 2$). Докажем при $s = m$. Последнее действие при нашей фиксированной расстановке скобок имеет вид $(a) * (b)$. Поскольку длина скобки (b) равна $m \geq 2$, то $b = (c) * (d)$. Тогда $(a) * (b) = (a) * ((c) * (d))$. Применяя аксиому A1, получаем

$$(a) * ((c) * (d)) = ((a) * (c)) * (d).$$

Но длина скобки (d) строго меньше, чем длина скобки $(b) = ((c) * (d))$. Значит, по предположению второй индукции результат получающийся при расстановке скобок $((a) * (c)) * (d)$ совпадает с g.

2) Предположим, что в моноиде $(G, *)$ есть две единицы: e и s. Рассмотрим $e * s$. Поскольку e – единица, получаем $e * s = s$. С другой стороны так как s – единица, то $e * s = e$. Таким образом, $e = s$.

3) Пусть $(G, *)$ – группа. Предположим, что $g \in G$ – элемент, у которого есть хотя бы два обратных: f и h. Тогда $f = f * (g * h) = (f * g) * h = h$.

4) Пусть $a * b = e$. Рассмотрим операцию элемента a^{-1} и левой части и приравняем к операции элемента a^{-1} и правой части. (Домножим на a^{-1} слева.) Получим $a^{-1} * a * b = a^{-1} * e$. То есть $b = a^{-1}$.

Если $b * a = e$, то аналогично домножая слева на a^{-1}, получаем $b = a^{-1}$.

5) Обозначим $b^{-1} * a^{-1} = c$. Рассмотрим $(a * b) * c = (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * e * a^{-1} = e$. Значит, $c = (a * b)^{-1}$.

6) $g^{-1} * g = e$, значит $g = (g^{-1})^{-1}$. □

Определение 4. Подмножество H группы $(G, *)$ называется *подгруппой*, если $(H, *)$ является группой.

Подмножество S группы $(G, *)$ называется *замкнутым относительно операции* $*$, если для любых $a, b \in S$ выполнено $a * b \in S$. Подмножество S группы $(G, *)$ называется *замкнутым относительно взятия обратного*, если для любого $s \in S$ элемент s^{-1} также принадлежит S.

Предложение 1. *Непустое подмножество H группы $(G, *)$ является подгруппой тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно операции и замкнуто относительно взятия обратного.*

Доказательство. Если $(H, *)$ – группа, то операция $*$ корректно определена на H. Значит, H замкнуто относительно операции $*$. Пусть e – нейтральный элемент группы G, а s – нейтральный элемент группы H. Получаем $s * s = s$. В группе G есть обратный к s элемент s^{-1}. Умножая на него слева предыдущее равенство, получаем $s = e$. То есть единицы у групп G и H совпадают. Для каждго $g \in H$ есть обратный элемент g^{-1} в группе G и есть обратный элемент обратный элемент $g^{\vee}$ в группе H. Тогда $g * g^{-1} = e = g * g^{\vee}$. Умножив слева на g^{-1}, получаем $g^{-1} = g^{\vee}$. Поскольку для группы $(H, *)$ выполнена аксиома А3, то H замкнуто относительно взятия обратного.

Пусть теперь подмножество H замкнуто относительно операции и взятия обратного. Так как H замкнуто относительно операции, $(H, *)$ – группоид. Поскольку ассоциативность выполнена в G, то она выполнена и в H. Подмножество не пусто. Возьмчм элемент $h \in H$. Так как H замкнуто относительно взятия обратного, $h^{-1} \in H$. Пользуясь замкнутостью H относительно операции, получаем $h * h^{-1} = e \in H$. Таким образом, в H выполнена аксиома А2. Поскольку H замкнуто относительно взятия обратного, в H выполнена и аксиома А3. □

Зачастую вместо слова "операция"используют слово "умножение". Суть от этого не меняется и имеется в виду некоторая операция в группе. При этом на письме так же как и в случае обычного умножения чисел знак умножения можно опускать. Нейтральный элемент группы в этом случае зачастую называют "единицей группы". Такие обозначения называются *мультипликативными.*

Если заранее известно, что группа абелева, то часто используют *аддитивные* обозначения. Операция называется сложением и обозначается знаком "+ нейтральный элемент называется нулчм, а обратный элемент называется "противоположным элементом".

Соберем эти обозначения в таблице.

общие обозначения	мультипликативные обозначения	аддитивные обозначения
произвольная группа	произвольная группа	абелева группа
операция $*$	умножение $\cdot$	сложение $+$
нейтральный элемент e	единица e	ноль 0
обратный элемент g^{-1}	обратный элемент g^{-1}	противоположный элемент $-g$

Определение 5. Порядок группы G – это количество элементов в этой группе. (То есть мощьность множества G.) Порядок группы G обозначается $|G|$.

Определение 6. Пусть g – элемент группы G, а n – целое число. Определим n-ю степень элемента g следующим образом. Если n положительное, то $g^n =$

$g \cdot \ldots \cdot g$ – произведение n элементов g. Если n отрицательное, то $g^n = (g^{-1})^n$. Нулевая степень любого элемента равна нейтральному элементу e.

Упражнение 2. Выполнены следующие свойства степеней элемента группы:
1) $g^m g^n = g^{m+n}$,
2) $(g^m)^n = g^{mn}$
Указание. Рассмотреть все случаи знаков m и n.

Определение 7. Пусть g – элемент группы G. Порядок g – это минимальное натуральное число n такое, что $g^n = e$. Если такого числа не существует, то порядок элемента g равен бесконечности. Порядок элемента g обозначается $\mathrm{ord}g$.

Лемма 2. *Пусть g – элемент группы G такой, что $\mathrm{ord}g = n$, а m – целое число. Тогда*

$$\mathrm{ord}g^m = \frac{n}{НОД(m,n)}.$$

Доказательство. По свойству степеней $(g^m)^k = g^{mk}$. Следовательно порядок g^m – это минимальное натуральное k такое, что mk делится на n.

Рассмотрим разложения на простые множители чисел n и m. Можем считать, что простые множители входящие в m и n одинаковы, но при этом степени вхождения могут быть равны нулю.

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_l^{\alpha_l}, \qquad n = p_1^{\beta_1} \ldots p_l^{\beta_l}.$$

Имеем: $\mathrm{НОД}(m,n) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \ldots p_l^{\min\{\alpha_l,\beta_l\}}$.

Отсюда

$$\frac{n}{\mathrm{НОД}(m,n)} = p_1^{\alpha_1 - \min\{\alpha_1,\beta_1\}} \ldots p_l^{\alpha_l - \min\{\alpha_l,\beta_l\}} =$$
$$= p_1^{\max\{\alpha_1-\beta_1,0\}} \ldots p_l^{\max\{\alpha_l-\beta_l,0\}}$$

Легко видеть, что это минимальное число k такое, что km делится на $p_i^{\alpha_i}$ для каждого i. □

Конечную группу можно задавать с помощью таблицы умножения. Таблица умножения – это квадратная таблица, строки и столбцы которой соответствуют элементам группы. А на пересечении строки и столбца стоит произведение элемента, соответствующео строки и элемента, соответствующего столбцу.

Пример 1. *Построим таблицу сложения для группы* $(\mathbb{Z}_2, +) = \{0, 1\}$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

Примеры групп.
1) Числовые аддитивные группы:

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +).$$

Нейтральный элемент 0, обратный к элементу x – это $-x$. Выполнение аксиом следуют из свойств сложения чисел. Все данные группы бесконечны и коммутативны.

2) Группа вычетов (остатков) по модулю n: $(\mathbb{Z}_n, +)$. Сложение происходит по модулю n. Нейтральный элемент 0, обратный к элементу x – это $n - x$. Выполнение аксиом следуют из свойств остатков. Данная группа коммутативна и имеет порядок n.

3) Числовые мультипликативные группы:

$$\mathbb{Q}^\times = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), \mathbb{R}^\times = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), \mathbb{C}^\times = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot).$$

Нейтральный элемент 1, обратный к элементу x – это $\frac{1}{x}$. Выполнение аксиом следуют из свойств умножения чисел. Данные группы бесконечны и коммутативны.

4) (Обобщение примера 3) Пусть R – кольцо с единицей. Обозначим множество обратимых элементов через $R^\times$. Рассмотрим группу обратимых элементов $(R^\times, \cdot)$. Нейтральный элемент – единица кольца. Обратные элементы существуют так как $R^\times$ состоит из обратимых элементов. Если R – коммутативное кольцо, то $R^\times$ – коммутативная группа.

Задача 2. Приведите пример некоммутативного кольца R такого, что $R^\times$ – коммутативная группа порядка больше 1.

5) Группа комплексных корней из единицы n-ой степени. Пусть $\mathcal{C}_n$ – множество всех комплексных корней степени n из 1. Тогда $(\mathcal{C}_n, \cdot)$ – абелева группа порядка n. Докажем это. Для того, чтобы доказать, что $\mathcal{C}_n$ – группа мы воспользуемся, тем, что это подмножество в известной нам группе $\mathbb{C}^\times$. Нам надо лишь проверить, что $\mathcal{C}_n$ замкнуто относительно умножения и взятия обратного. Пусть $a, b \in \mathcal{C}_n$, то есть $a^n = b^n = 1$. Тогда $(ab)^n = a^n b^n = 1$, значит, $ab \in \mathcal{C}_n$. Мы доказали, что $\mathcal{C}_n$ замкнуто относительно умножения. С другой стороны $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$, следовательно, $\mathcal{C}_n$ замкнуто относительно взятия обратного. То, что группа $\mathcal{C}_n$ абелева следует из того, что она является подгруппой в абелевой группе $\mathbb{C}^\times$.

Единица этой группы – это 1, обратный к элементу x – это $\frac{1}{x}$.

6) Группы перестановок.

а) Множество S_n всех перестановок n элементов с операцией композиции $\circ$ является группой. Докажем это. Нейтральный элемент этой группы – это тождественная перестановка, обратный элемент – обратная перестановка. Ассоциативность следует из следующей важной леммы.

Лемма 3. *Пусть есть четыре множества: X, Y, Z и T. И пусть фиксированы отображения между этими множествами $\varphi\colon X \to Y$, $\psi\colon Y \to Z$ и $\zeta\colon Z \to T$. Тогда $(\zeta \circ \psi) \circ \varphi = \zeta \circ (\psi \circ \varphi)$.*

Доказательство. Возьмем элемент $x \in X$. Тогда

$$(\zeta \circ \psi) \circ \varphi(x) = (\zeta \circ \psi)(\varphi(x)) = (\zeta(\psi(\varphi(x))).$$

С другой стороны

$$\zeta \circ (\psi \circ \varphi)(x) = \zeta(\psi \circ \varphi)(x) = (\zeta(\psi(\varphi(x))).$$

□

Применяя данную лемму к случаю $X = Y = Z = T = \{1, 2, \ldots, n\}$ получаем ассоциативность S_n. Порядок группы S_n равен $n!$. При $n > 3$ группа S_n не коммутативна.

б) Множество A_n четных перестановок из S_n с операцией композиции образует *группу четных перестановок*. Докажем, что A_n – подгруппа S_n. Это следует из того, что произведение четных перестановок – четная перестановка и обратная к четной перестановке четная. Группа A_n не коммутативна при $n \geq 4$.

в) Группа клейна. Рассмотрим множество перестановок (в виде произведения независимых циклов) $\{\mathrm{id},\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}$. Несложно проверить, что это множество замкнуто относительно композиции и что каждая перестановка из этого множества обратна самой себе. Получаем, что данные перестановки образуют подгруппу в S_4, которая обозначается V_4. Эта группа коммутативна.

6') (Обобщение примера 6а) Пусть X – некоторое множество (возможно бесконечное). Рассмотрим множество $\mathrm{S}(X)$ биекций $X \to X$ с операцией композиции. Если $|X| < \infty$, то получаем группу перестановок. В общем случае получаем *группу симметий множества* X. Нейтральный элемент – тождественное преобразование. Обратный – обратное преобразование. Ассоциативность следует из леммы 3.

7) Матричные группы. Пусть $\mathbb{K}$ – поле.

а) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ – множество невырожденных матриц $n \times n$ с элементами из $\mathbb{K}$. Легко видеть, что это множество замкнуто относительно умножения матриц. Умножение матриц ассоциативно, единичная матрица – нейтральный элемент и все невырожденные матрицы обратимы (обратная также невырождена). Следовательно, $(\mathrm{GL}(\mathbb{K}), \cdot)$ – группа.

б) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ – множество $n \times n$ матриц с определителем 1 с элементами из $\mathbb{K}$. Это подмножество замкнуто относительно умножения и взятия обратного.

Эти группы конечны тогда и только тогда, когда поле $\mathbb{K}$ конечно.

8) Группы преобразований векторного пространства. (Подгруппы в группе $S(V)$, где V – векторное пространство.)

а) Группа обратимых линейных преобразований V.

б) Группа ортогональных линейных преобразований V.

в) Группа обратимых аффинных преобразований V.

г) Группа движений V.

Во всех этих группах нейтральный элемент – тождественное преобразование, а обратный элемент – обратное преобразование. Эти группы конечны тогда и только тогда, когда поле, над которым V – векторное пространство конечно и размерность V конечна.

Лекция 2

Определение 8. Пусть $(G, *)$ и $(H, \circ)$ – две группы. Отображение $\varphi\colon G \to H$ называется *гомоморфизмом*, если $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$.

Докажем следующие элементарные свойства гомоморфизма.

Лемма 4. *Пусть $\varphi\colon (G, *) \to (H, \circ)$ – гомоморфизм. Обозначим через e_G и e_H единицы группы G и H соответственно. Тогда*

1) $\varphi(e_G) = e_H$,

2) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. (В левой части обратный берется в группе G, а в правой – в H.)

Доказательство. 1) Поскольку e_G – единица группы G. Тогда $e_G * e_G = e_G$, а значит,

$$\varphi(e_G) \circ \varphi(e_G) = \varphi(e_G * e_G) = \varphi(e_G).$$

В группе H есть обратный к $\varphi(e_G)$ элемент. Умножим на него обе части. Получим

$$\varphi(e_G) = e_H.$$

2) $e_H = \varphi(e_G) = \varphi(g * g^{-1}) = \varphi(g) \circ \varphi(g^{-1})$. Следовательно, $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. □

.

Задача 3. Пусть $(G, *)$ и $(H, \circ)$ – моноиды с единицами e_G и e_H соответственно. И пусть $\psi\colon G \to H$ – отображение такое, что $\psi(g_1 * g_2) = \psi(g_1) \circ \psi(g_2)$. Может ли так быть, что $\psi(e_G) \neq \psi(e_H)$?

Определение 9. Биективный гомоморфизм $\varphi\colon G \to H$ называется *изоморфизмом*, а группы G и H при наличии изоморфизма между ними называются *изоморфными*.

Легко видеть, что если φ – изоморфизм, то обратное отображение φ^{-1} также является изоморфизмом. Кроме того композиция двух изоморфизмов – изоморфизм. Из этого следует, что классы изоморфности групп – это классы эквивалентности.

Пример 2. *Рассмотрим две группы:* $(\mathbb{R}, +)$ *и* $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. *Вторая группа состоит из всех положительных вещественных чисел с операцией умножения. Рассмотрим отображение* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\varphi(x) = 2^x$. *Легко видеть, что* φ – *изоморфизм.*

Пример 3. *Группа* $\mathbb{Z}_n$ *изоморфна группе* $\mathcal{C}_n$. *Один из возможных автоморфизмов переводит* $k \in \mathbb{Z}_n$ *в* $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$. *То, что* φ – *гомоморфизм обеспечивается тем, что при умножении комплексных чисел их аргументы складываются.*

Пример 4. *Группа* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *изоморфна группе невырожденных линейных преобразований векторного пространства* $\mathbb{C}^n$ *с операцией композиции. Чтобы получить изоморфизм между этими группами нужно выбрать некоторый базис в* $\mathbb{C}^n$ *и отобразить линейное преобразование в его матрицу в этом базисе.*

Изоморфные группы имеют одинаковую алгебраическую структуру. Более строго любой алгебраический факт (то есть формулирующийся только в терминах операции) верный в одной из них, верен и в другой. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять изоморфные группы и будем изучать группы с точностью до изоморфизма.

На самом деле изоморфизм (биективное соответствие, переводящее умножение одной группы в умножение другой) можно задать в случае, когда про одну из структур не известно, группа это или нет. Тогда вторая структура будет автоматически группой. Воспользуемся этой идеей в следующем примере.

Группа кватернионов Q_8. Рассмотрим множество из 8 элементов:

$$\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

Умножение устроено следующим образом: знаки умножаются отдельно,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k,\ ji = -k,\ ik = -j,\ ki = j,\ jk = i,\ kj = -i.$$

Легко видеть, что 1 – нейтральный элемент, и каждый элемент обратим. Для того, чтобы утверждать, что Q_8 – группа, необходимо проверить ассоциативность. Сделаем это опосредованно.

Рассмотрим следующее множество из 8 комплексных матриц, которое мы обозначим $\overline{Q}_8$.

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \pm \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},\ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \pm \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Здесь i – это мнимая единица (комплексное число).

Рассмотрим биекцию φ между Q_8 и $\overline{Q}_8$.

$$\pm 1 \mapsto \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ i \mapsto \pm \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},\ j \mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ k \mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что φ переводит умножение в Q_8 в матричное умножение. Следовательно, $(\overline{Q}_8, \cdot)$ – это замкнутое относительно умножения и взятия обратной матрицы подмножество в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Значит, $\overline{Q}_8$ – подгруппа. Тогда Q_8 – группа, изоморфная $\overline{Q}_8$.

Ещч один важный пример группы дачт следующая конструкция.

Группа диэдра D_n. Рассмотрим правильный n-угольник. Группа диэдра D_n – это группа всех движений плоскости, сохраняющих этот n-угольник.

Упражнение 3. а) Докажите, что в группе D_n ровно $2n$ элементов. Среди них n поворотов и n осевых симметрий. Все оси симметрий проходят через центр n-угольника. Если n ччтно, то половина симметрий проходит через 2 вершины, а половина – через две серидины противоположных сторон. Если же n неччтно, то все симметрии проходят через одну вершину и середину противоположной стороны.

б) Найдите, как устроена операция в группе D_n, то есть чему равна композиция двух поворотов, двух симметрий и поворота с симметрией.

Можно конструировать группу из уже известных с помощью следующей конструкции.

Определение 10. Пусть G и H – две группы. *Прямым произведением* 'nb[групп называется группа $G \times H$, состоящая из пар (g, h), где $g \in G$, $h \in H$. Операция устроена следующим образом: $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$. Ассоциативность следует из ассоциативности операций в G и H. Нейтральный элемент – это (e_G, e_H), обратный элемент к элементу (g, h) – это (g^{-1}, h^{-1}). Порядок прямого произведения групп – это произведение их порядков.

Особый интерес представляют гомоморфизмы и изоморфизмы из группы в себя.

Определение 11. Гомоморфизм $\varphi\colon G \to G$ называется *эндоморфизмом*. Изомомрфизм $\varphi\colon G \to G$ называется *автоморфизмом*.

Легко видеть, что композиция двух эндоморфизмов – это эндоморфизм, а композиция двух автоморфизмов – автоморфизм. Множество эндоморфизмов группы G с операцией композиции образует моноид $\mathrm{End}(G)$ с нейтральным элементом id. Множество автоморфизмов группы G с операцией композиции образует группу $\mathrm{Aut}(G)$.

Пусть g – элемент группы G. Рассмотрим отображение $\varphi_g \colon G \to G$, определчнное по правилу $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$.

Лемма 5. *Отображение φ_g является автоморфизмом группы G.*

Доказательство. Проверим, что φ_g – гомоморфизм:

$$\varphi_g(hf) = ghfg^{-1} = ghg^{-1}gfg^{-1} = \varphi_g(h)\varphi_g(f).$$

То, что φ_g – биекция следует из того, что существует обратное отображение. А именно, обратное к φ_g отображение – это $\varphi_{g^{-1}}$. □

Автоморфизм называются *внутренним*, если он имеет вид φ_g для некоторого $g \in G$.

Предложение 2. *а) Множество внутренних автоморфизмов с операцией композиции образует подгруппу $\mathrm{Inn}(G)$ в $\mathrm{Aut}(G)$.*

б) Отображение $g \to \varphi_g$ – это гомоморфизм из G в $\mathrm{Inn}(G)$.

Доказательство. Докажем равенство $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$. Для этого применим этот гомоморфизм к элементу $s \in G$:

$$\varphi_g \circ \varphi_h(s) = \varphi_g(\varphi_h(s)) = \varphi_g(hsh^{-1}) = ghsh^{-1}g^{-1} = (gh)s(gh)^{-1} = \varphi_{gh}(s).$$

Из доказанного равенства следует пункт б) и замкнутость $\mathrm{Inn}(G)$ относительно композиции. Осталось проверить, что $\mathrm{Inn}(G)$ замкнуто относительно взятия обратного. Для этого заметим, что $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_e = \mathrm{id}$. □

Определение 12. Группа G называется *циклической*, если найдчтся элемент $g \in G$ такой, что каждый элемент G имеет вид g^k для некоторого целого числа k.

Элемент g называется *порождающим элементом группы G*, при этом группа G обозначается $\langle g \rangle$.

Замечание 1. В предыдущем определении не требуется, чтобы все степени g были различны.

Пример 5. *а) Группа $\mathbb{Z}$ является циклической. В самом деле, $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.*

б) Аналогично $\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$.

Упражнение 4. Проверьте, что группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $(Q, +)$ и $\mathbb{Q}^\times$ не являются циклическими.

Лемма 6. *Пусть $\mathrm{ord}(g) = n$. Тогда порядок группы $\langle g \rangle$ также равен n.*

Доказательство. Рассмотрим множество элементов $S = \{g^0 = e, g, g^2, \dots g^{n-1}\}$. Докажем, что все элементы группы $\langle g \rangle$ лежат в S и что все элементы S различны.

В самом деле, пусть g^k – некоторый элемент $\langle g \rangle$. Разделим k на n с остатком: $k = nm + r$, где $0 \le k < n$. Тогда $g^k = (g^n)^m g^r = g^r \in S$.

С другой стороны. Пусть $0 \le a < b < n$ и $g^a = g^b$. Умножая последнее равенство на g^{-a}, получаем $e = g^{b-a}$. Поскольку $0 < b-a < n$, это противоречит тому, что $\mathrm{ord}(g) = n$. □

Если известно, что порядок g равен n, то группу $\langle g\rangle$ обозначают $\langle g\rangle_n$.

Замечание 2. Для каждого элемента g некоторой группы G можно рассмотреть циклическую подгруппу, порождчнную этим элементом: $\langle g\rangle \subset G$.

Теорема 1. *а) Любая циклическая группа бесконечного порядка изоморфна* $\mathbb{Z}$.
б) Любая циклическая группа порядка n *изоморфна* $\mathbb{Z}_n$.

Доказательство. а) Пусть $G = \langle g\rangle$ и $|G| = \infty$. Тогда $\operatorname{ord}(g) = \infty$. Из этого следует, что при $k \neq m$ выполнено $g^k \neq g^m$. Рассмотрим отображение

$$\psi\colon \mathbb{Z} \to G, \qquad k \mapsto g^k.$$

Легко видеть, что ψ – гомоморфизм. Так как все элементы G имеют вид g^k, ψ – сюръекция, а так как при $k \neq m$ выполнено $g^k \neq g^m$, ψ – инъекция. Итак, ψ – изоморфизм.

б) В предыдущей лемме мы доказали, что $G = \{g^0, \dots, g^{n-1}\}$. Рассмотрим отображение

$$\psi\colon \mathbb{Z}_n \to G, \qquad k \mapsto g^k, \qquad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Легко видеть, что ψ – изоморфизм. □

Теорема 2. *1) Подгруппа циклической группы циклическая.*
2) Все подгруппы в $\mathbb{Z}$ *имеют вид* $k\mathbb{Z}$.
3) Все подгруппы в $\mathbb{Z}_n$ *имеют вид* $\langle d\rangle = d\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{d}}$, *где* d *делитель числа* n. *В частности, для каждого делителя* q *числа* n *есть ровно одна подгруппа в* $\mathbb{Z}_n$, *изоморфная* $\mathbb{Z}_q$, *а именно,* $\langle \frac{n}{q}\rangle$.
4) Пусть $m \in \mathbb{Z}_n$, *тогда* $\langle m\rangle = \langle НОД(m, n)\rangle$.

Доказательство. 1) Пусть $G = \langle g\rangle$ и пусть H – некоторая подгруппа в G. Если $H = \{e\}$, то утверждение доказано. Пусть $H \neq \{e\}$. Если $g^k \in H$, то $g^{-k} \in H$. Значит существует положительное число k такое, что $g^k \in H$. Пусть l – наименьшее положительное число такое, что $g^l \in H$. Рассмотрим некоторое m такое, что $g^m \in H$. Разделим m на l с остатком: $m = ls + r$, где $0 \leq r < l$. Получаем $g^r = g^m(g^l)^{-s} \in H$. Поскольку l минимальное положительное число такое, что $g^l \in H$, получаем $r = 0$. То есть в G все элементы имеют вид $(g^l)^s$, значит $G = \langle g^s\rangle$.

2) По пункту 1 любая подгруппа в циклической группе $\mathbb{Z}$ имеет вид $\langle k\rangle = k\mathbb{Z}$.

3) По доказательству пункта 1 подгруппа $H \subset \langle g\rangle$ циклическая и порождается элементом g^l для минимального положительного l такого, что $g^l \in H$. Значит если H – подгруппа $\mathbb{Z}_n$, то $H = \langle d\rangle$, где d – минимальное положительное число такое, что его вычет лежит в H. Допустим, что n не делится на d. Тогда $n = dq + r$, где $0 < r < d$. Однако тогда r – положительное число меньше d такое, что его вычет лежит в H. Это противоречие с выбором d. Значит, n делится на d. Легко видеть, что $\langle d\rangle = d\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{d}}$.

4) По лемме 2 порядок элемента $m \in \mathbb{Z}_n$ равен $\frac{n}{\text{НОД}(m,n)}$. А значит,

$$\langle m\rangle \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{\text{НОД}(m,n)}}.$$

Но по пункту 3 есть ровно одна подгруппа в $\mathbb{Z}_n$, изоморфная $\mathbb{Z}_{\frac{n}{\text{НОД}(m,n)}}$ и это $\langle \text{НОД}(m, n)\rangle$. Следовательно, $\langle m\rangle = \langle \text{НОД}(m, n)\rangle$. □