Лекция 11. Коммутант и разрешимость.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

21 октября, 2020

Определение. Пусть x и y – элементы группы G. Коммутатором элементов x и y называется элемент
$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Лемма. $[x, y] = e$ тогда и только тогда, когда элементы x и y перестановочны (то есть $xy = yx$).

$$xy = yx \Leftrightarrow xyx^{-1} = y \Leftrightarrow xyx^{-1}y^{-1} = e.$$

Замечание. Обратный элемент к коммутатору является коммутатором. В самом деле:

$$[x, y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x].$$

Определение. Коммутант группы G – это подгруппа, порожденная всеми коммутаторами пар элементов из G. Коммутант группы G обозначается G' или $[G, G]$.

Лемма. Коммутант состоит из произведений коммутаторов.

Доказательство. По определению, G' состоит из произведений коммутаторов и обратных к ним. Но, так как обратный к коммутатору – коммутатор, G' состоит из произведения коммутаторов.

Лемма. $G' = \{e\}$ тогда и только тогда, когда G коммутативна.

Доказательство. Если G коммутативна, то все коммутаторы равны e, и значит, $G' = \{e\}$.
Если же G не абелева, то найдутся два элемента x и y такие, что $xy \neq yx$. Тогда $[x, y] \neq e \in G'$.

Лемма. Сопряженный к коммутатору элемент является коммутатором.

$$
\begin{aligned}
g[x,y]g^{-1} &= gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = \\
&= gx(g^{-1}g)y(g^{-1}g)x^{-1}(g^{-1}g)y^{-1}g^{-1} = \\
&= (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gx^{-1}g^{-1})(gy^{-1}g^{-1}) = \\
&= (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}].
\end{aligned}
$$

Следствие. G' – нормальная подгруппа в G.

Любой элемент G' имеет вид $[x_1,y_1]\cdot[x_2,y_2]\cdot\ldots\cdot[x_n,y_n]$. Тогда

$$
\begin{aligned}
g[x_1,y_1][x_2,y_2]\ldots[x_n,y_n]g^{-1} &= \\
&= g[x_1,y_1](g^{-1}g)[x_2,y_2](g^{-1}g)\ldots(g^{-1}g)[x_n,y_n]g^{-1} = \\
&= (g[x_1,y_1]g^{-1})(g[x_2,y_2]g^{-1})\ldots(g[x_n,y_n]g^{-1}) = \\
&= [gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}]\ldots[gx_ng^{-1}, gy_ng^{-1}].
\end{aligned}
$$

Лемма. Группа G/G' коммутативна.

Доказательство. Рассмотрим коммутатор двух произвольных элементов из G/G':

$$[gG', hG'] = gG' \cdot hG' \cdot (gG')^{-1} \cdot (hG')^{-1} = [g, h]G' = G'.$$

То есть коммутатор любых элементов из G/G' равен единице группы G/G'. Значит, G/G' – абелева группа.

Теорема. G' – минимальная нормальная подгруппа, фактор по которой абелев. (То есть, если $G \triangleright H$ и группа G/H – абелева группа то $G' \subset H$.)

Доказательство. Рассмотрим коммутатор двух произвольных элементов из G/H:
$[g_1H, g_2H] = g_1H \cdot g_2H \cdot (g_1H)^{-1} \cdot (g_2H)^{-1} = [g_1, g_2]H$. С другой стороны, так как G/H – абелева группа, $[g_1H, g_2H] = H$. Получаем $[g_1, g_2]H = H$, следовательно, $[g_1, g_2] \in H$. Поскольку коммутаторы порождают G', выполняется $G' \subset H$.

Теорема. $S_n' = A_n$.

Доказательство. Как известно, $A_n \lhd S_n$ и $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ – абелева группа. Значит, $S_n' \subset A_n$.
Обратное включение будет следовать из явных выкладок.
$[(i,j),(j,k)] = (i,j)(j,k)(i,j)(j,k) = (i,k,j)$.
Значит, любой тройной цикл (i,k,j) лежит в S_n'. Далее утверждение теоремы следует из следующей леммы.

Лемма. A_n порождается тройными циклами.

Доказательство. Пусть $\sigma \in A_n$. Любая перестановка разлагается в произведение транспозиций. Поскольку σ – четная перестановка, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_{2m}$. Рассмотрим $\tau_{2l-1}\tau_{2l}$.
Возможны 3 варианта:
1) $\tau_{2l-1} = \tau_{2l}$. Тогда из произведения можно их удалить.
2) $\tau_{2l-1} = (i,j)$, $\tau_{2l} = (j,k)$. Тогда $\tau_{2l-1}\tau_{2l} = (i,j,k)$.
3) $\tau_{2l-1} = (i,j)$, $\tau_{2l} = (k,s)$. Тогда
$\tau_{2l-1}\tau_{2l} = (i,j)(j,k)(j,k)(k,s) = (i,j,k)(j,k,s)$.

Теорема. 1) $A_3' = \{id\}$,
2) $A_4' = V_4$,
3) $A_n' = A_n$ при $n \geq 5$.

Доказательство. 1) Группа A_3 изоморфна $\mathbb{Z}_3$.
2) $|A_4| = 12$, $|V_4| = 4$, следовательно, $|A_4/V_4| = 3$, то есть $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$ – абелева группа. Значит, $A_4' \subset V_4$. С другой стороны
$[(i,j,k)(i,k,s)] = (i,j,k)(j,k,s)(i,k,j)(j,s,k) = (i,s)(j,k)$.
Следовательно, $V_4 \subset A_4'$. Итак, $A_4' = V_4$.
3) Как следует из предыдущего пункта при $n \geq 4$ выполнено $(i,s)(j,k) \in A_n'$ $\forall i,j,k,s$.
Далее утверждение теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма. При $n \geq 5$ группа A_n порождается парами несмежных транспозиций $(i,j)(k,s)$.

Лемма. При $n \geq 5$ группа A_n порождается парами несмежных транспозиций $(i,j)(k,s)$.

Доказательство.
Пусть H – подгруппа A_n, $n \geq 5$ порожденная всеми парами несмежных транспозиций.

$$(i,j)(k,s) \cdot (k,s)(j,r) = (i,j)(j,r) = (i,j,r).$$

Значит, H содержит все тройные циклы. Но, как уже доказано, тройные циклы порождают A_n. Следовательно, $H = A_n$.

Теорема. Пусть F – поле такое, что $|F| \geq 4$. Тогда
1) $\mathrm{SL}_n(F)' = \mathrm{SL}_n(F)$
2) $\mathrm{GL}_n(F)' = \mathrm{SL}_n(F)$

Доказательство. 1) Для удобства записи сделаем нужную выкладку при $n = 2$. Поскольку $|F| \geq 4$, найдется $a \in F$ такое, что $a \notin \{0, 1, -1\}$. Тогда есть a^{-1} и для любого $\mu \in F$ существует $\lambda = (a^2 - 1)^{-1}$. Заметим, что

$$\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a & a\lambda \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}\lambda \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (a^2 - 1)\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично, при любом n выполняется $E + \mu E_{ij} \in \mathrm{SL}_n(F)'$ при всех $i \neq j$.

Теорема. Пусть F – поле такое, что $|F| \geq 4$. Тогда
1) $\mathrm{SL}_n(F)' = \mathrm{SL}_n(F)$
2) $\mathrm{GL}_n(F)' = \mathrm{SL}_n(F)$

Продолжение доказательства. 1) Группа $\mathrm{SL}_n(F)$ порождается элементами вида $E + \mu E_{ij}$. В самом деле, любую матрицу A из $\mathrm{SL}_n(F)$ можно привести элементарными преобразованиями первого типа к матрице E. При этом происходит умножение на матрицы вида $E + \mu E_{ij}$. Получаем
$(E + \mu_k E_{i_k j_k}) \dots (E + \mu_1 E_{i_1 j_1})A = E$.
Значит,
$A = (E - \mu_1 E_{i_1 j_1}) \dots (E - \mu_k E_{i_k j_k})$.

2) $\mathrm{GL}_n(F)' \supset \mathrm{SL}_n(F)' = \mathrm{SL}_n(F)$.
С другой стороны $\mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{SL}_n(F) \cong F^\times$ – абелева группа, а значит, $\mathrm{GL}_n(F)' \subset \mathrm{SL}_n(F)$. Получаем $\mathrm{GL}_n(F)' = \mathrm{SL}_n(F)$.

Лемма. Пусть $\varphi\colon G \to K$ – гомоморфизм групп. Тогда $\varphi(G') \subset K'$. Если гомоморфизм φ сюръективен, то $\varphi(G') = K'$.

Доказательство. Поскольку φ – гомоморфизм,

$$\varphi([x,y]) = \varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \\ = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Значит, $\varphi([x,y]) \in K'$, и следовательно, $\varphi(G') \subset K'$. Если же φ сюръективен, то для любых $a, b \in K$ найдутся $x, y \in G$ такие, что $\varphi(x) = a$, $\varphi(y) = b$. Тогда $[a,b] = [\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x,y]) \subset \varphi(G')$. Значит, $\varphi(G') = K'$.

Следствие. Пусть $G \triangleright H$. Тогда $(G/H)' \cong G'/(H \cap G')$.

Доказательство. Применим лемму к сюръективному каноническому гомоморфизму $\pi_H\colon G \to G/H$. Получим $(G/H)' = \pi_H(G')$. Рассмотрим ограничение $\pi_H|_{G'}$. Имеем $\mathrm{Ker}(\pi_H|_{G'}) = H \cap G'$, $\mathrm{Im}(\pi_H|_{G'}) = \pi_H(G')$ По теореме о гомоморфизме получаем утверждение следствия.

Определение. Подгруппа $H \subset G$ называется характеристической, если для любого автоморфизма $\varphi\colon G \to G$ выполнено $\varphi(H) = H$.

Характеристическая подгруппа автоматически является нормальной. Для доказательства этого достаточно рассмотреть внутренний автоморфизм $\varphi_g\colon h \mapsto ghg^{-1}$.

Лемма. Характеристическая подгруппа характеристической подгруппы является характеристической.

Доказательство. Пусть H – характеристическая подгруппа G, а N – характеристическая подгруппа H. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Тогда $\varphi(H) = H$. Поскольку $\varphi^{-1}(H) = H$, получаем, что $\varphi|_H\colon H \to H$ – автоморфизм H. Значит, поскольку N характеристическая, $\varphi(N) = \varphi|_H(N) = N$.

Замечание. Напомним, что нормальная подгруппа нормальной подгруппы не всегда нормальна.

Предложение. Коммутант и центр – характеристические подгруппы.

Доказательство. Пусть G – группа. Рассмотрим $z \in Z(G)$, и пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено
$\varphi(z)g = \varphi(z\varphi^{-1}(g)) = \varphi(\varphi^{-1}(g)z) = g\varphi(z)$.
То есть $\varphi(z) \in Z(G)$.

Пусть теперь $g \in G'$. Тогда
$g = [x_1, y_1] \dots [x_k, y_k]$.
Получаем $\varphi(g) = [\varphi(x_1), \varphi(y_1)] \dots [\varphi(x_k), \varphi(y_k)] \in G'$.

Рассмотрим ряд кратных коммутантов.
$G \supset G' \supset G'' \supset G^{(3)} \supset G^{(4)} \supset \dots$
Из предложения следует, что $G^{(i)}$ – характеристическая (и в частности нормальная) подгруппа в G.