Лекция 12. Разрешимые группы. Простые группы.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

27 октября, 2020

Определение.

Группа G называется разрешимой, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $G^{(n)} = \{e\}$.
Число n называется ступенью (степенью) разрешимости G.

Пример

Группа G разрешима ступени 1 тогда и только тогда, когда G абелева.

Пример

- Группа S_2 разрешима ступени 1.
- Группа S_3 разрешима ступени 2: $S_3' = A_3$, $A_3' = \{\mathrm{id}\}$.
- Группа S_4 разрешима ступени 3: $S_4' = A_4$, $A_4' = V_4$, $V_4' = \{\mathrm{id}\}$.
- Группа S_n при $n \geq 5$ не разрешима. Действительно, $S_n' = A_n$, $A_n' = A_n$.

Лемма. Подгруппа разрешимой группы разрешима.

Доказательство. Пусть H – подгруппа G. Тогда $H' \subset G'$, $H'' \subset G''$ и т.д. Значит, $H^{(n)} \subset G^{(n)} = \{e\}$.

Лемма. Факторгруппа разрешимой группы разрешима.

Доказательство. Пусть $G \triangleright H$. Как доказано на прошлой лекции $(G/H)' \cong G'/(H \cap G')$
Применяя эту же формулу, получаем
$(G'/(H \cap G'))' \cong G''/((H \cap G') \cap G'') = G''/(H \cap G'')$.
Значит, $(G/H)'' \cong G''/(H \cap G'')$.
Аналогично, $(G/H)^{(i)} \cong G^{(i)}/(H \cap G^{(i)})$.
Поскольку G разрешима, найдется натуральное n такое, что $G^{(n)} = \{e\}$. Тогда $(G/H)^{(n)} = \{e\}$.

Теорема. (Критерий разрешимости группы.) Пусть $G \triangleright H$. Тогда G разрешима тогда и только тогда, когда H разрешима и G/H разрешима.

Доказательство. В одну сторону (из разрешимости G следует разрешимость H и G/H) утверждение теоремы сводится к предыдущим леммам.
Пусть теперь H и G/H разрешимы. Как было доказано ранее $(G/H)^{(i)} \cong G^{(i)}/(H \cap G^{(i)})$. Найдется такое натуральное m, что $(G/H)^{(m)} = \{e\}$. Тогда $G^{(m)}/(H \cap G^{(m)}) = \{e\}$, а значит, $G^{(m)} \subset H$. Но поскольку H разрешима, найдется натуральное k такое, что $H^{(k)} = \{e\}$. Следовательно $G^{(m+k)} = \{e\}$. То есть G разрешима.

Следствие. Пусть задан гомоморфизм $\psi\colon G \to H$. Тогда G разрешима если и только если $\operatorname{Ker}\psi$ и $\operatorname{Im}\psi$ разрешимы.

Предложение. Группа B_n невырожденных верхнетреугольных матриц над полем F разрешима.

Доказательство. Пусть U_n – группа верхнетреугольных матриц $n \times n$ с единицами на диагонали. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon B_n \to (F^\times)^n$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ 0 & a_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & a_n. \end{pmatrix} \mapsto (a_1, \dots, a_n)$$

Очевидно, что $\mathrm{Ker}\varphi = U_n$, а $\mathrm{Im}\,\varphi = (F^\times)^n$. Так как образ – абелева группа, он разрешим. Значит, чтобы доказать разрешимость B достаточно доказать разрешимость U_n.

Рассмотрим гомоморфизм (проверьте это!) $\psi\colon U_n \to F^{n-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & b_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (b_1, \dots, b_n)$$

Образ ψ лежит в коммутативной группе. Значит, он разрешим. Ядро ψ – подгруппа

$$U_{n1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\psi_2 \colon U_{n1} \to F^{n-2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & c_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (c_1, \dots, c_n)$$

Образ ψ_2 абелев, и значит разрешим, а ядро – подгруппа U_{n2},

$$U_{n2}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$ И т.д. Каждый раз разрешимость U_{ni} сводится к разрешимости $U_{n,i+1}$. Поскольку $U_{n,n-1}=\{e\}$, она разрешима. Это завершает доказательство разрешимости B.

Теорема. Группа G разрешима тогда и только тогда, когда она включается в ряд подгрупп
$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright G_3 \triangleright \ldots \triangleright G_n = \{e\}$, где G_i/G_{i+1} абелевы.

Доказательство. Если G разрешима, можно взять $G_i = G^{(i)}$.
Пусть G включается в такой ряд подгрупп. Тогда G/G_1 абелева, а значит, $G' \subset G_1$. Для доказательства разрешимости G достаточно доказать разрешимость G', а для этого достаточно доказать разрешимость G_1.
Аналогично, разрешимость G_1 сводится к разрешимости G_2 и т.д.
Так как $G_n = \{e\}$, она разрешима. Следовательно, G разрешима.

Определение.

Группа G называется <u>простой</u>, если у нее нет нормальных подгрупп, отличных от $\{e\}$ и самой G.

Предложение. Абелева группа проста тогда и только тогда, когда она изоморфна $\mathbb{Z}_p$ для простого p.

Доказательство. В абелевой группе все подгруппы являются нормальными. Поэтому абелева группа проста тогда и только тогда, когда в ней нет других подгрупп, кроме $\{e\}$ и G. Для каждого $g \in G$ можно рассмотреть циклическую подгруппу $\langle g \rangle \subset G$. Если $g \neq e$, то $\langle g \rangle \neq \{e\}$. Значит, $\langle g \rangle = G$, то есть G – циклическая. Если $G \cong \mathbb{Z}$, то в ней есть нетривиальные подгруппы $k\mathbb{Z}$. Если же $G \cong \mathbb{Z}_{ab}$, где $a \neq 1$ и $b \neq 1$, то в G есть нетривиальная подгруппа $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_b$.

Теорема. Группа A_n проста при $n \geq 5$.

Лемма. При $n \geq 5$ все циклы длины 3 сопряжены в A_n.

Доказательство. Докажем, что любой тройной цикл (a, b, c) сопряжен циклу $(1, 2, 3)$. В S_n эти циклы сопряжены перестановкой

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ a & b & c & u & v & \dots \end{pmatrix},$$

то есть $\sigma(1, 2, 3)\sigma^{-1} = (a, b, c)$. Если σ – четная перестановка, то $(1, 2, 3)$ и (a, b, c) сопряжены в A_n. Если же σ – нечетная перестановка, то рассмотрим

$$\widehat{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ a & b & c & v & u & \dots \end{pmatrix} \in A_n.$$

Тогда $\widehat{\sigma}(1, 2, 3)\widehat{\sigma}^{-1} = (a, b, c)$

Лемма. В A_n все пары несмежных транспозиций сопряжены.

Доказательство. Пусть $\sigma = (a, b)(c, d)$ – пара несмежных транспозиций. Докажем, что σ сопряжена $(1, 2)(3, 4)$. Возьмем $\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ a & b & c & d & \dots \end{pmatrix} \in S_n$. Тогда $\xi(1, 2)(3, 4)\xi^{-1} = \sigma$.
Если $\xi \in A_n$, то $(1, 2)(3, 4)$ и σ сопряжены в A_n. Если же ξ – нечетная перестановка, то рассмотрим
$\widehat{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ b & a & c & d & \dots \end{pmatrix} \in A_n$.
Имеем $\widehat{\xi}(1, 2)(3, 4)\widehat{\xi}^{-1} = \sigma$, то есть $(1, 2)(3, 4)$ и σ сопряжены в A_n.

Теорема. Группа A_n проста при $n \geq 5$.

Доказательство. Пусть H – нормальная подгруппа в A_n.
Случай 1. В H есть тройной цикл (abc). Поскольку H нормальна в A_n, а все тройные циклы в A_n сопряжены, то все тройные циклы лежат в H. Поскольку A_n порождается тройными циклами, $H = A_n$.
Случай 2. В H есть перестановка δ, в разложении которой есть цикл длины не менее 4.
$\delta = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_m)(\dots)\dots(\dots)$
Сопряжем δ с помощью перестановки $\xi = (x_1x_3)(x_2x_4)$.
Получаем
$\xi\delta\xi^{-1} =$
$(x_1x_3)(x_2x_4)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_m)(\dots)\dots(\dots)(x_1x_3)(x_2x_4) =$
$= (x_3x_4x_1x_2x_5\dots, x_m)(\dots)\dots(\dots) \in H.$
Тогда
$[(x_3, x_4, x_1, x_2, x_5, \dots, x_m)(\dots)\dots(\dots)]^{-1}\circ$
$\circ[(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_m)(\dots)\dots(\dots)] = (x_2x_mx_4) \in H$
Попадаем в случай 1.

Теорема. Группа A_n проста при $n \geq 5$.

Продолжение доказательства. Случай 3. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть хотя бы два цикла длины 3.

$\sigma = (a, b, c)(d, e, f)\ldots.$

Тогда $(a, b, c, d, e)\sigma(a, b, c, d, e)^{-1} = (b, c, d)(e, a, f)\ldots = \delta.$

Имеем $\delta^{-1}\sigma = (a, d, f, c, e)$. Попадаем в случай 2.

Случай 4. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть хотя бы три цикла длины 2. Сопряжем $\sigma = (a, b)(c, d)(e, f)\ldots$ с помощью (a, b, c, d, e), получим

$\delta = (bc)(de)(af)\ldots.$

Перемножив $\delta^{-1}\sigma$ получаем $(a, c, e)(b, f, d)$ и попадем в случай 3.

Случай 5. В H есть перестановка, разлагающаяся в 2 цикла длины 2. По лемме там есть все пары несмежных транспозиций. А они порождают A_n.

Теорема. Группа A_n проста при $n \geq 5$.

Продолжение доказательства.

Случай 6. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть циклы длины 2 и 3 при этом есть хотя бы 1 цикл длины 3. Если мы не в условиях случая 3, то в σ есть лишь 1 цикл длины 3. Возведем σ в квадрат, попадем в случай 1.

Случай 7. В H есть перестановка σ, в разложении которой есть циклы длины 2, 3 и 4 при этом есть хотя бы 1 цикл длины 4. Возведем σ в квадрат, попадем в один из случев 6, 4 или 5.