Лекция 13. Простота группы SO(3). Теоремы Силова.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

28 октября, 2020

Определение.

Группа $\mathrm{SO}(3)$ – это всех ортогональных преобразований трехмерного пространства, сохраняющих ориентацию.

В ортонормированном базисе матрицы преобразований из $\mathrm{SO}(3)$ – это ортогональные матрицы ($A^T = A^{-1}$) с определителем 1.
В курсе линейной алгебры доказывалось, что матрица элемента из $\mathrm{SO}(3)$ может быть приведена в ортонормированном базисе к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

То есть любой элемент $\mathrm{SO}(3)$ – это поворот вокруг некоторой оси.

Лемма. Пусть $h \in \mathrm{SO}(3)$ – поворот на угол θ вокруг оси l. Тогда сопряженный элемент ghg^{-1} – это поворот на угол θ вокруг оси $g(l)$.

Ясно, что у сопряженного оператора комплексные собственные значения такие же. Это доказывает равенство углов. Осталось объяснить, что ось вращения будет $g(l)$.
Пусть v – собственный вектор оператора h с собственным значением 1. Тогда $(ghg^{-1})(gv) = ghv = gv$, то есть gv – собственный вектор с собственным значением 1 у оператора ghg^{-1}.

Лемма. Композиция двух поворотов на угол π с углом между осями l и l' равным α, равен повороту относительно оси m, перпендикулярной l и l' на угол 2α.

Ось m переворачивается при каждом из данных поворотов, а значит, в итоге с осью m происходит тождественное преобразование. Ось l при первом повороте остается неподвижной, а при втором повернется на угол 2α.

Теорема. Группа $\mathrm{SO}(3)$ проста.

Пусть $H \neq \{\mathrm{id}\}$ – нормальная подгруппа в $\mathrm{SO}(3)$. Найдется поворот $h \in H$ на угол $\alpha \in (0, 2\pi)$ вокруг оси l. Пусть g – поворот на угол π вокруг оси m, образующей с осью l угол $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда $s = g(hg^{-1}h^{-1}) = (ghg^{-1})h^{-1} \in H$. При этом $hg^{-1}h^{-1}$ – поворот на угол π вокруг оси $h(m)$, которая образует с осью m угол γ. А значит, s – поворот на угол 2γ вокруг оси, перпендикулярной m и $h(m)$.

Угол γ равен 0 при $\beta = 0$ и равен α при $\beta = \frac{\pi}{2}$. По соображениям непрерывности угол γ может принимать все значения от 0 до α, то есть в H найдутся повороты на все углы от нуля до α. Рассматривая степени данных поворотов, получим повороты на все углы. По лемме, если в H лежит поворот на некий угол, то там лежат и все повороты на данный угол. Значит, $H = \mathrm{SO}(3)$.

Рассмотрим действие группы G на множестве всех подгрупп в группе G сопряжениями. В самом деле, легко убедиться, что если $H \subset G$ – подгруппа, то gHg^{-1} также подгруппа.

Определение.

Стабилизатор подгруппы H при данном действии называется нормализатором H в G и обозначается $N_G(H)$.

Лемма. 1) $N_G(H)$ – подгруппа в G, содержащая H,
2) H нормальна в $N_G(H)$,
3) Если H нормальна в K, где K – подгруппа G, то $K \subset N_G(H)$.

Доказательство. 1) По определению, $N_G(H)$ – стабилизатор, а значит, подгруппа в G.
2) При $g \in N_G(H)$ имеем $gHg^{-1} = H$, это доказывает нормальность H в $N_G(H)$.
3) Если $H \triangleleft K$, то для любого $k \in K$ выполнено $kHk^{-1} = H$, то есть $k \in St(H) = N_G(H)$.

Определение.

Пусть G – конечная группа порядка $|G| = p^k m$, где p – простое число, а m – число не делящееся на p. Подгруппа $S \subset G$ называется силовской p-подгруппой в G, если $|S| = p^k$.

Первая теорема Силова. Для каждого простого делителя p порядка группы G существует силовская p-подгруппа $S \subset G$.

Доказательство. 1) Если $|G| = p^k$, то $S = G$.
2) Если G – абелева группа, то $S = \mathrm{Tor}_p(G)$.
Для общего случая проведем доказательство по индукции по порядку G.

Случай 1. $|Z(G)|$ делится на p.

$Z(G)$ – абелева группа. В ней найдется некая подгруппа A такая, что $|A| = p$. Ясно, что A – нормальная подгруппа в G. При этом $|G/A| = \frac{n}{p}$, где $n = |G|$. По предположению индукции в G/A есть силовская p-подгруппа B в G/A. Рассмотрим $\pi_A^{-1}(B) \subset G$. Имеем,
$|\pi_A^{-1}(B)| = |\mathrm{Ker}\,(\pi_a\,|_{\pi_A^{-1}(B)})| \cdot |\mathrm{Im}\,(\pi_a\,|_{\pi_A^{-1}(B)})| = |A| \cdot |B| = p^k$.
Можно взять $S = \pi_A^{-1}(B)$.

Случай 2. $|Z(G)|$ не делится на p.

Рассмотрим разложение группы G на классы сопряженных элементов. Классы сопряженности, состоящие из одного элемента – это элементы центра. Так как $|G|$ делится на p, найдется класс сопряженности C такой, что $|C| \neq 1$ не делится на p. Пусть $g \in C$. Рассмотрим $|Cent(g)| = \frac{|G|}{|C|} < |G|$. С другой стороны, $|Cent(g)|$ делится на p^k. По предположению индукции есть силовская подгруппа $S \subset Cent(g) \subset G$, при этом $|S| = p^k$.

Лемма. Если силовская подгруппа единственна, то она нормальна.

Доказательство. Рассмотрим gSg^{-1} – это подгруппа G. Но $|gSg^{-1}| = |S|$. В самом деле, очевидно, что $|gSg^{-1}| \leq |S|$, с другой стороны, $S = g^{-1}(gSg^{-1})g$, значит, $S \leq |gSg^{-1}|$. Имеем, gSg^{-1} – силовская подгруппа G, а значит, $gSg^{-1} = S$, то есть S нормальна.

Вторая теорема Силова. 1) Любая p-подгруппа G содержится в некоторой силовской.
2) Любые две силовские p-подгруппы сопряжены.

Доказательство. Случай $m = 1$ ясен. Пусть $m > 1$. Пусть S – силовская p-подгруппа, $|S| = p^k$.
Пусть $H \subset G$ – подгруппа порядка p^l, $l \leq k$. Рассмотрим действие H на множестве левых смежных классов по S:
$h \cdot gS = (hg)S$.
Корректность очевидна: если $gS = g'S$, то $g' = gs$ для некоторого $s \in S$. Тогда $hg' = hgs$ и $hgS = hg'S$.
Из теоремы Лагранжа количество левых смежных классов по S равно $\frac{|G|}{|S|} = m$.
Имеем, $|H| = p^l = |St(gS)| \cdot |Orb(gS)|$, значит, порядок каждой орбиты либо 1, либо степень p. Так как сумма порядков орбит не делится на p, есть орбита из одного элемента. То есть $hgS = gS$. Отсюда $g^{-1}hg \in S$, то есть $h \in gSg^{-1}$. Значит, $H \subset gSg^{-1}$, где $|gSg^{-1}| = p^k$.
Если $|H| = p^k$, то $H = gSg^{-1}$.