Лекция 16.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

18 ноября, 2020

Пример.

Группа S_3 изоморфна группе симметрий треугольника D_3. Построим следующее двумерное представление группы S_3. Поместим начало координат в центр треугольника. Тогда любая симметрия треугольника задает линейное преобразование плоскости. Например, повороты запишутся матрицами

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Данное представление неприводимо (даже над $\mathbb{C}$).

В самом деле, если двумерное представление приводимо, то у всех его операторов есть общий собственный вектор. Если взять треугольник с горизонтальной стороной, то одна из симметрий запишется матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. У такой матрицы два собственный вектора (с точностью до пропорциональности): $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Но ни один из них не является собственным вектором матриц поворотов.

Пример не вполне приводимого представления.

Рассмотрим следующее представление группы $\mathbb{Z}$ (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$):

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно, что $\langle e_1 \rangle$ – инвариантное подпространство. Но если бы это представление было вполне приводимым, оно бы раскладывалось в сумму двух одномерных. Тогда в подходящем базисе все матрицы были бы диагональны. Однако матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не диагонализуема.

Предложение. Пусть $\rho\colon G \to F^\times$ – одномерное представление группы G. Тогда
1) $G' \subset \operatorname{Ker}\rho$,
2) $\rho = \zeta \circ \pi_{G'}$ для некоторого (одномерного) представления группы G/G',
3) соответствие $\rho \leftrightarrow \zeta$ является биекцией между множествами 1-мерных представлений G и G/G'.

Доказательство. 1) Так как группа $F^\times$ абелева, ее коммутант тривиален. А при гомоморфизме образ коммутанта попадает в коммутант.
2) Определим $\zeta(gG') = \rho(g)$. Нужно проверить корректность, то есть, что если $gG' = hG'$, то $\rho(g) = \rho(h)$. Действительно, если $gG' = hG'$, то $g = hs$, $s \in G'$. Тогда
$\rho(g) = \rho(h)\rho(s) = \rho(h)$. Получаем, что ζ определено корректно и $\rho = \zeta \circ \pi_{G'}$, так как $\zeta \circ \pi_{G'}(g) = \zeta(gG') = \rho(g)$.
3) По каждому $\zeta\colon G/G' \to F^\times$ однозначно строится $\rho = \zeta \circ \pi_{G'}$ и так получаются все одномерные представления G.

Следствие. У группы G ровно $|G/G'|$ одномерных представлений.

Предложение. Если F – алгебраически замкнутое поле, то любое неприводимое представление ρ абелевой группы G одномерно.

Доказательство. Операторы $\rho(g)$ коммутируют между собой. Пусть $V_\lambda \neq \{0\}$ – собственное подпространство одного оператора $\rho(g_0)$. Тогда V_λ инвариантно относительно всех операторов $\rho(g)$. Действительно, при $v \in V_\lambda$ имеем
$\rho(g_0)(\rho(g)(v)) = \rho(g_0) \circ \rho(g)(v) = \rho(g) \circ \rho(g_0)(v) =$
$= \rho(g)(\lambda v) = \lambda \rho(g)(v).$
То есть $\rho(g)(v)$ – собственный вектор $\rho(g)$ с собственным значением λ.

Продолжение доказательства.

Докажем по индукции по размерности n, что у представления абелевой группы над алгебраически замкнутым полем F есть одномерное инвариантное подпространство. База $n = 1$ очевидна. Шаг индукции. Если все операторы $\rho(g)$ скалярны, возьмем любое 1-мерое подпространство. Если есть $\rho(g_0)$ не скалярный. Пусть λ – его собственное значение. Тогда V_λ инвариантно относительно всех операторов $\rho(g)$, а значит, у представления $\rho\,|_{V_\lambda}$ есть 1-менрное инвариантное подпространство. Оно же будет одномерным инвариантным подпространством для ρ.

Замечание

Если отказаться от алгебраической замкнутости поля, то утверждение предыдущего предложения будет неверным. Действительно $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x. \end{pmatrix}$ является неприводимым 2-мерным представлением $(\mathbb{R}, +)$ над $\mathbb{R}$

Теорема Машке. Пусть $|G| = n$ не делится на характеристику поля F. Тогда любое представление ρ группы G вполне приводимо.

Доказательство. Для доказательства полной приводимости достаточно доказать, что у каждого инвариантного подпространства есть дополнительное инвариантное подпространство. Пусть $U \subset V$ – инвариантное подпространство. Рассмотрим некоторое (не обязательно инвариантное) дополнительное подпространство W, то есть выполнено $V = U \oplus W$. Можно рассмотреть проектор P на второе подпространство: $P(u + w) = w$. При этом $P^2 = P$. Напомним, что любой оператор Q с условием $Q^2 = Q$ является проектором на $\mathrm{Im}\, Q$ вдоль $\mathrm{Ker}\, Q$. Наша цель – изменить проектор P так, чтобы измененный проектор P' был также проектором вдоль U на некоторое инвариантное подпространства W'. Тогда $V = U \oplus W'$.

Продолжение доказательства.

Определим

$$P' = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)P\rho(g)^{-1}.$$

Поскольку $P(u) = 0$ для любого $u \in U$, выполнено $P\rho(g)^{-1}(u) = 0$. Получаем

$$P'(u) = \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_{g\in G}\rho(g)P\rho(g)^{-1}(u) = 0.$$

То есть $U \subset \operatorname{Ker} P'$. Поскольку P – проектор на W вдоль U, для любого $g \in G$ выполнено $P\rho(g)^{-1}(v) - \rho(g)^{-1}(v) \in U$. Домножая на $\rho(g)$, получаем $\rho(g)P\rho(g)^{-1}(v) - v \in U$. Следовательно, $P'(v) - v \in U$. Применяя P', получаем $P'^2(v) - P'(v) = 0$. То есть $P'^2 = P'$, что означает, что P' – проектор на свой образ, который мы обозначим W'. Если $P'(v) = 0$, то $-v = P'(v) - v \in U$. Значит, $\operatorname{Ker} P' = U$.

Продолжение доказательства.

Мы уже доказали, что $V = U \oplus W'$. Осталось объяснить, что W' – инвариантное подпространство.
Докажем, что для любого $h \in G$ выполнено $\rho(h)P' = P'\rho(h)$.

$$\rho(h)P' = \rho(h)\frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G}\rho(g)P\rho(g)^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G}\rho(hg)P\rho(g)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{hg\in G}\rho(hg)P\rho(hg)^{-1}\rho(h) = P'\rho(h).$$

Пусть $w' \in W'$, тогда существует $v \in V$ с условием $P'(v) = w'$.
Имеем $\rho(g)(w') = \rho(g)P'(v) = P'\rho(g)(v) \subset W'$.
Значит, W' инвариантно.

Приведем примеры, показывающие, что условие конечности группы и условие, что $\mathrm{char} F \nmid n$ в теореме Машке существенные.

Пример 1 (уже был).

Представление группы $\mathbb{Z}$ (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$):

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приводимо, но не вполне приводимо. К этому примеру не применима теорема Машке, так как группа бесконечна.

Пример 2.

Представление группы $\mathbb{Z}_p$ (над полем $\mathbb{Z}_p$):

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично примеру 1, это представление приводимо, но не вполне приводимо .

Пример.

Мономиальное представление ρ группы S_n вполне приводимо. Оно раскладывается в прямую сумму 2-х подпредставлений. Первое подпредставление одномерно (и следовательно неприводимо) и является ограничением ρ на инвариантное подпространство $U = \langle e_1 + \ldots + e_n \rangle$.
Второе подпредставление – это ограничение ρ на инвариантное подпространство $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum x_i = 0\}$.
Осталось объяснить, что $\rho\,|_W$ неприводимо.
Пусть $L \subset W$ – ненулевое инвариантное подпространство. Возьмем вектор $v = (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0) \in L$. Тогда найдутся $i \neq j$ такие, что $x_i \neq x_j$. Применим $\rho((i,j))$ к вектору v. При этом x_i и x_j поменяются местами. Тогда $v - \rho((i,j))(v) = (0, \ldots, x_i - x_j, 0, \ldots, 0, x_j - x_i, 0 \ldots, 0) \in L$. То есть $e_i - e_j \in L$. Применяя к $e_i - e_j$ оператор $\rho(\sigma)$, где $\sigma(i) = k$, $\sigma(j) = m$ получаем $e_k - e_m \in L$. Однако $\langle e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n \rangle = W$. То есть $L = W$.

Лемма Шура. Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ – два неприводимых представления. И пусть $\varphi\colon V \to W$ – морфизм этих представлений. Тогда
1) если ρ и ζ не изоморфны, то $\varphi = 0$,
2) если ρ и ζ изоморфны, то φ – либо нулевое отображение, либо изоморфизм,
3) если $V = W$ и представления над алгебраически замкнутым полем, что $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}$.

Доказательство. 1 и 2) Докажем, что $\mathrm{Ker}(\varphi)$ является ρ-инвариантным подпространством в V. Действительно, пусть $v \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено $\zeta(g) \circ \varphi(v) = 0$. Однако $\zeta(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(g)$. Значит, $\rho(g)(v) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Следовательно, так как ρ неприводимо, либо $\mathrm{Ker}\,\varphi = V$ и тогда φ – нулевое отображение, либо $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$ и φ – инъекция.

Продолжение доказательства.

Докажем, что $\operatorname{Im}\varphi \subset W$ является ζ-инвариантным подпространством. Возьмем $\varphi(v) \in \operatorname{Im}\varphi$ и применим $\zeta(g)$. Получаем $\zeta(g) \circ \varphi(v) = \varphi \circ \rho(g)(v) \in \operatorname{Im}\varphi$. Так как ζ – неприводимое представление, либо $\operatorname{Im}\varphi = \{0\}$ и тогда φ – нулевое отображение, либо φ – сюръекция.

Итак, либо $\varphi = 0$, либо φ – биекция, то есть изоморфизм.

3) Если F алгебраически замкнуто и $V = W$, то у оператора φ есть собственное значение λ. Тогда у оператора $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ есть нетривиальное ядро. По предыдущему тогда $\varphi - \lambda\,\mathrm{id} = 0$.