Лекция 17.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

24 ноября, 2020

Лемма Шура. Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ – два неприводимых представления. И пусть $\varphi\colon V \to W$ – морфизм этих представлений. Тогда
1) если ρ и ζ не изоморфны, то $\varphi = 0$,
2) если ρ и ζ изоморфны, то φ – либо нулевое отображение, либо изоморфизм,
3) если $V = W$ и представления над алгебраически замкнутым полем, что $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}$.

Доказательство. 1 и 2) Докажем, что $\mathrm{Ker}(\varphi)$ является ρ-инвариантным подпространством в V. Действительно, пусть $v \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено $\zeta(g) \circ \varphi(v) = 0$. Однако $\zeta(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(g)$. Значит, $\rho(g)(v) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Следовательно, так как ρ неприводимо, либо $\mathrm{Ker}\,\varphi = V$ и тогда φ – нулевое отображение, либо $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$ и φ – инъекция.

Продолжение доказательства.

Докажем, что $\operatorname{Im}\varphi \subset W$ является ζ-инвариантным подпространством. Возьмем $\varphi(v) \in \operatorname{Im}\varphi$ и применим ζ. Получаем $\zeta \circ \varphi(v) = \varphi \circ \rho(v) \in \operatorname{Im}\varphi$. Так как ζ – неприводимое представление, либо $\operatorname{Im}\varphi = \{0\}$ и тогда φ – нулевое отображение, либо φ – сюръекция.

Итак, либо $\varphi = 0$, либо φ – биекция, то есть изоморфизм.

3) Если F алгебраически замкнуто и $V = W$, то у оператора φ есть собственное значение λ. Тогда у оператора $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ есть нетривиальное ядро. По предыдущему тогда $\operatorname{Ker}\varphi = V$, то есть $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}$.

Следствие 1. Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ – два неприводимых комплексных представления конечной группы G. И пусть $\varphi\colon V \to W$ – произвольное линейное отображение.
Положим
$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta(g) \circ \varphi \circ \rho(g)^{-1}$
Тогда
1) если ρ и ζ не изоморфны, то $\widetilde{\varphi} = 0$,
2) если $V = W$ и $\rho = \zeta$, то $\widetilde{\varphi} = \lambda\,\mathrm{id}$, где $\lambda = \frac{tr\,\varphi}{\dim V}$.

Доказательство. Нужно проверить, что $\widetilde{\varphi}$ – морфизм представлений.

$$\zeta(g) \circ \widetilde{\varphi} = \zeta(g) \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \zeta(h) \circ \varphi \circ \rho(h)^{-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \zeta(gh) \circ \varphi \circ \rho(h)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{gh \in G} \zeta(gh) \circ \varphi \circ \rho(gh)^{-1} \circ \rho(g) = \widetilde{\varphi} \circ \rho(g).$$

Из леммы Шура следуют оба утверждения. Причем
$$\lambda \dim V = \mathrm{tr}\,\lambda E = \mathrm{tr}\,\widetilde{\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}\,\left(\rho(g) \circ \varphi \circ \rho(g)^{-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}\,\varphi = \mathrm{tr}\,\varphi.$$

Выберем некоторые базисы в V и W. Тогда представления ρ и ζ соответствуют матричным представлениям.

Определение.

Матричным элементом ρ_{ij} называется функция $G \to F$, которая переводит элемент $g \in G$ в (i,j) элемент матрицы $\rho(g)$.

Определение.

Пусть $|G|$ не делится на $\mathrm{char}\, F$. Введем следующую билинейную форму на множестве функций из G в F:

$$\langle f, h\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)h(g^{-1}).$$

Следствие 2. Если представления ρ и ζ не изоморфны, то для любых $1 \leq a, b \leq \dim W;\ 1 \leq c, d \leq \dim V$ выполнено $\langle \zeta_{ab}, \rho_{cd}\rangle = 0$.

Следствие 2. Если представления ρ и ζ не изоморфны, то для любых $1 \leq a, b \leq \dim W$; $1 \leq c, d \leq \dim V$ выполнено $\langle \zeta_{ab}, \rho_{cd} \rangle = 0$.

Доказательство. Возьмем в следствии 1 отображение φ, задающееся в выбранных базисах матрицей E_{bc}. Тогда так как $\widetilde{\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta(g) \circ \varphi \circ \rho(g)^{-1} = 0$, получаем
$0 = \widetilde{\varphi}_{ad} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} \zeta_{ai}(g) \varphi_{ij} \rho_{jd}(g^{-1}) =$
$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta_{ab}(g) \rho_{cd}(g^{-1}) = \langle \zeta_{ab}, \rho_{cd} \rangle$.

Следствие 3. Пусть $V = W$ и $\rho = \zeta$. Тогда

$$\langle \rho_{ab}, \rho_{cd} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\dim V}, & \text{если a=d и b=c;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Опять берем φ, задающееся матрицей E_{bc}. Получаем

$$\langle \rho_{ab}, \rho_{cd} \rangle = \left(\frac{\operatorname{tr} \varphi}{\dim V} \operatorname{id} \right)_{ad} = \begin{cases} \frac{1}{\dim V}, & \text{если a=d и b=c;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение

Характером конечномерного представления $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(F)$ называется функция $\chi_\rho\colon G \to F$, где $\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}\rho(g)$.

Замечание.

Если мы возьмем изоморфное матричное представление ρ', то $\operatorname{tr}\rho'(g) = \operatorname{tr} C\rho(g)C^{-1} = \operatorname{tr}\rho(g)$. То есть характоры изоморфных представлений совпадают. В частности характер можно связать с линейным (а не матричным) представлением, так как он не зависит от того, какой базис мы выбрали.

Далее мы будем в основном интересоваться комплексными характерами, то есть характерами комплексных представлений.

Будем говорить, что характер неприводим, если соответствующее представление неприводимо.

Предложение. Пусть χ_ρ – характер комплексного представления ρ в пространстве V. Тогда
1) $\chi_\rho(e) = \dim\ V$;
2) $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$, то есть характеры постоянны на классах сопряженности;
3) $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ для любого элемента g конечного порядка;
4) если $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, то $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.

Доказательство. 1) Единичный элемент группы при представлении переходит в единичную матрицу, ее след равен размерности пространства.
2) $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}\,(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) = \mathrm{tr}\,\rho(g) = \chi_\rho(g)$.

3) $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ для любого элемента g конечного порядка.

3) Если $g \in G$ – элемент порядка n, то $\rho(g)$ – диагонализуемая матрица, собственные значения которой – корни n-ой степени из 1. То есть в некотором базисе

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots, 0 & \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots, 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{\dim V} \end{pmatrix},$$

$$\rho(g^{-1}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & 0 & \dots, 0 & \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & \dots, 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{\dim V}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\varepsilon_1} & 0 & \dots, 0 & \\ 0 & \overline{\varepsilon_2} & \dots, 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{\varepsilon_{\dim V}} \end{pmatrix}$$

Так как если $\varepsilon_i = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то
$\varepsilon_i^{-1} = (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = (\cos\varphi - i\sin\varphi) = \overline{\varepsilon_i}$.

4) если $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, то $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.

В базисе, состоящем из базисов подпространств, на которых реализуются представления ρ_1 и ρ_2, имеем

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\operatorname{tr} \rho(g) = \operatorname{tr} \rho_1(g) + \operatorname{tr} \rho_2(g)$.

Определение.

Обозначим пространство всех функций $G \to \mathbb{C}$ через $\mathbb{C}^G$. Функцию будем называть центральной, если она постоянна на классах сопряженности.

Лемма. Если группа G конечно, то полуторалинейная форма
$(f,h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{h(g)} \qquad f,h\in\mathbb{C}^G$
превращает $\mathbb{C}^G$ в эрмитово пространство.

Доказательство. Ясно, что $(\cdot,\cdot)$ – полуторалинейная функция и $(f,h)=\overline{(h,f)}$. Надо проверить лишь положительную определенность.
$(f,f) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{f(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |f(g)|^2 > 0$, если $f\neq 0$.

Замечание.

Если применять две введенные формы к характерам, то они совпадают, то есть $(\chi_\rho,\chi_\zeta)=\langle\chi_\rho,\chi_\zeta\rangle$.
В самом деле

$$\langle\chi_\rho,\chi_\zeta\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)\chi_\zeta(g^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)\overline{\chi_\zeta(g)} = (\chi_\rho,\chi_\zeta).$$

Теорема (свойство ортогональности характеров). Пусть ρ и ζ – неприводимые комплексные представления группы G. Тогда

$$(\chi_\rho, \chi_\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho \cong \zeta; \\ 0, & \text{если } \rho \ncong \zeta. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем

$$(\chi_\rho, \chi_\zeta) = \langle \chi_\rho, \chi_\zeta \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\dim V} \rho_{ii}, \sum_{j=1}^{\dim W} \zeta_{jj} \right\rangle = \sum_{i,j} \langle \rho_{ii}, \zeta_{jj} \rangle.$$

Если $\rho \ncong \zeta$, то $\langle \rho_{ii}, \zeta_{jj} \rangle = 0$ для любых i, j.

Если же $\rho \cong \zeta$, можно считать $\rho = \zeta$. Тогда

$$\langle \rho_{ii}, \rho_{jj} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ \frac{1}{\dim V} & \text{если } i = j. \end{cases}$$

В итоге $\langle \chi_\rho, \chi_\zeta \rangle = \sum_{i=1}^{\dim V} \frac{1}{\dim V} = 1$.

Следствие. Пусть $\rho = m_1\rho_1 \oplus \ldots, \oplus m_k\rho_k$ – разложение в прямую сумму неприводимых. Тогда $m_i = (\chi_\rho, \chi_{\rho_i})$.