Лекция 18.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

25 ноября, 2020

Обозначение.

Пусть Γ – центральная функция на конечной группе G и пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ – комплексное представление. Обозначим через $\psi(\rho, \Gamma)$ оператор $V \to V$, определенный по правилу
$$\psi(\rho, \Gamma) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \rho(g).$$

Предложение. Если ρ – неприводимое представление, то $\psi(\rho, \Gamma) = \lambda\,\mathrm{id}$, где $\lambda = \frac{|G|}{\chi_\rho(e)}(\chi_\rho, \Gamma)$.

Доказательство. Имеем
$$\rho(g)\psi(\rho, \Gamma)\rho(g)^{-1} = \rho(g) \left(\sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)} \rho(h) \right) \rho(g)^{-1} =$$
$$= \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)} \rho(g)\rho(h)\rho(g)^{-1} = \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)} \rho(ghg^{-1}) =$$
$$= \sum_{ghg^{-1} \in G} \overline{\Gamma(h)} \rho(ghg^{-1}) = \sum_{s \in G} \overline{\Gamma(g^{-1}sg)} \rho(s) =$$
$$= \sum_{s \in G} \overline{\Gamma(s)} \rho(s) = \psi(\rho, \Gamma).$$
Таким образом, $\rho(g)\psi(\rho, \Gamma) = \psi(\rho, \Gamma)\rho(g)$. По лемме Шура $\psi(\rho, \Gamma) = \lambda\,\mathrm{id}$.

Продолжение доказательства. $\lambda = \frac{|G|}{\chi_\rho(e)}(\chi_\rho, \Gamma)$

$$\lambda\,\chi_\rho(e) = \lambda \dim V = \mathrm{tr}\,(\lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{tr}\,\psi(\rho, \Gamma) =$$

$$= \mathrm{tr}\,\left(\sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\rho(g)\right) = \sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\mathrm{tr}\,\rho(g) =$$

$$= \sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\chi_\rho(g) = |G|\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\chi_\rho(g) = |G|(\chi_\rho, \Gamma).$$

Получаем $\lambda = \frac{|G|(\chi_\rho,\Gamma)}{\chi_\rho(e)}$.

Следствие Если $(\chi_{\rho_i}, \Gamma) = 0$ для всех неприводимых характеров конечной группы G, то $\psi(\rho, \Gamma) = 0$ для любого представления ρ.

Доказательство. По теореме Машке любое представление группы G является прямой суммой неприводимых $\rho = m_1\rho_1 \oplus \ldots \oplus m_s\rho_s$. Тогда $\psi(\rho, \Gamma) = \bigoplus_{i=1}^{s} m_i\psi(\rho_i, \Gamma) = 0$.

Теорема. Характеры неприводимых комплексных представлений образуют ортонормированный базис в пространстве центральных функций.

Доказательство. Мы знаем, что характеры неизоморфных неприводимых представлений ортогональны. Нужно лишь доказать, что они образуют полную систему. Для этого докажем, что если центральная функция ортогональна всем неприводимым характерам, то она нулевая.
Пусть Γ – центральная функция такая, что $(\chi_\rho, \Gamma) = 0$ для всех неприводимых ρ. Тогда для любого представления σ оператор $\psi(\sigma, \Gamma)$ нулевой. В частности это верно для регулярного представления $\sigma\colon G \to \mathbb{C}[G]$. Базис групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$ обозначим через $\{u_g \mid g \in G\}$.
Имеем $0 = \psi(\sigma, \Gamma)(u_e) = \sum_{g\in G} \overline{\Gamma(g)}\sigma(g)(u_e) = \sum_{g\in G} \overline{\Gamma(g)} u_g$
Значит, $\overline{\Gamma(g)} = 0$ для всех g. То есть $\Gamma = 0$.

Следствие. Количество неизоморфных комплексных представлений группы G равно количеству классов сопряженности в G.

Доказательство. Размерность пространства центральных функций равно количеству классов сопряженности в G. С другой стороны размерность пространства центральных функций равно мощности базиса, то есть количеству неприводимых представлений.

Предложение. Каждое неприводимое комплексное представление ρ размерности n группы G входит в регулярное представление σ с кратностью n.

Доказательство. Кратность вхождения ρ в σ равно $(\chi_\sigma, \chi_\rho) =$ $= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\sigma(g)\overline{\chi_\rho(g)}$. Но при $g \neq e$ оператор $\sigma(g)$ не оставляет ни одного вектора u_h на месте. Значит, $\chi_\sigma(g) = 0$ при $g \neq e$. При этом $\chi_\sigma(e) = |G|$. Получаем $(\chi_\sigma, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|}|G|\overline{\chi_\rho(e)} = \chi_\rho(e) = n$.

Теорема. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_k$ – все неизоморфные неприводимые комплексные представления группы G. Пусть размерность представления ρ_i равна n_i. Тогда $n_1^2 + \ldots + n_k^2 = |G|$.

Доказательство. Мы знаем, что $\sigma = n_1\rho_1 \oplus \ldots \oplus n_k\rho_k$. Получаем
$|G| = \dim \sigma = n_1 \dim\, \rho_1 + \ldots + n_k \dim\, \rho_k = n_1^2 + \ldots + n_k^2$.

Комплексные представления S_3.

$|S_3| = 6 = n_1^2 + \ldots + n_k^2$. При этом, так как $|S_3/S_3'| = 2$, есть два одномерных представления группы S_3. Легко видеть, что это тривиальное представление (все переходит в 1) и знаковое (четные перестановки переходят в 1, а нечетные – в -1). Получаем, что есть еще ровно одно двумерное неприводимое представление. Мы знаем, что у S_3 есть неприводимое представление, полученное из изоморфизма S_3 и D_3. Заметим, что в S_3 есть ровно 3 класса сопряженности.

Комплексные представления S_4.

$|S_4| = 24 = n_1^2 + \ldots + n_k^2$. При этом $|S_4/S_4'| = 2$, и значит, у S_4 есть ровно 2 одномерных представления: тривиальное и знаковое. При этом 22 единственным образом раскладывается в сумму квадратов целых чисел ≥ 2, а именно $22 = 2^2 + 3^2 + 3^2$. Значит, у S_4 есть 2 одномерных, одно двумерное и два трехмерных неприводимых комплексных представлений. Двумерное неприводимое представление S_4 получается как композиция сюръективного гомоморфизма $S_4 \to S_3$ и неприводимого двумерного представления S_3. Трехмерные представления получаются из того, что S_4 изоморфна группе симметрий правильного тетраэдра и группе вращений куба. (Надо проверить, что эти представления неприводимы и не изоморфны!)