

ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА

1) Понятие группы. Простейшие следствия из аксиом: обобщенная ассоциативность, единственность единицы и обратного. Подгруппа. Проверка, что подмножество является группой. Ассоциативность композиции. Примеры групп.

(В конспекте Определение 3, Лемма 1, Определение 4, Предложение 1, Лемма 3, Примеры групп.)

2) Степень элемента группы. Порядок элемента группы. Порядок степени данного элемента. Циклические группы. Классификация циклических групп. Подгруппы циклических групп.

(В конспекте Определение 6, Определение 7, Лемма 2, Определение 12, Лемма 6, Теорема 1, Теорема 2.)

3) Гомоморфизм групп, простейшие свойства гомоморфизмов. Изоморфизм групп. Примеры изоморфизмов. Автоморфизмы. Группа внутренних автоморфизмов. Группы автоморфизмов циклических групп.

(В конспекте Определение 8, лемма 4, Определение 9, Примеры 2,3,4, Определение 11, Лемма 5, Предложение 2, Теорема 3)

4) Смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее (в том числе теорема Эйлера).

(В конспекте Определение 13, Лемма 7, Определение 14, Теорема 4, Следствие 1)

5) Теорема Коши.

(В конспекте Теорема 5)

6) Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Ядро и образ гомоморфизма. Критерий инъективности гомоморфизма. Канонический гомоморфизм. Теорема о гомоморфизме. Связь между порядками ядра и образа.

(В конспекте Определение 16, Предложение 3, Определение 17, Лемма 9, Лемма 16, Определение 18, Теорема 6, Следствие 2)

7) Подгруппа, порожденная подмножеством. Подгруппа, порожденная двумя подгруппами, одна из которых нормальна. Вторая теорема о гомоморфизме.

(В конспекте Определение 19, Лемма 10, Лемма 11, Теорема 7)

8) Третья теорема о гомоморфизме и следствие из нее.

(В конспекте Теорема 8, Следствие 3)

9) Центр группы. Изоморфизм между факторгруппой по центру и группой внутренних автоморфизмов. Нециклическость факторгруппы по центру.

(В конспекте Определение 20, Лемма 12, Предложение 4, Предложение 5)

10) Эквивалентность слов. Свободная группа. Проблема равенства слов.

(В конспекте Лемма 13, Определение 21, Замечание 5, Теорема 10)

11) Универсальное свойство свободной группы. Нормальное замыкание. Задание группы образующими и соотношениями. Пример: группа Диэдра.

(В конспекте Теорема 9, Определение 22, Лемма 14, Определение 23, Пример 9)

12) Внешнее и внутреннее прямое произведение групп. Теорема о факторизации прямого произведения.

(В конспекте Определение 10, Определение 24, Лемма 15, Замечание 7, Теорема 11.)

13) Свободная абелева группа. Ранг свободной абелевой группы. подгруппа свободной абелевой группы. Описание всех базисов через заданный базис.

(В конспекте Определение 27, Лемма 17, Предложение 6, Определение 28, Предложение 7)

14) Универсальное свойство свободной абелевой группы. Теорема о согласованных базисах. Представление конечнопорожденной абелевой группы в виде суммы циклических.

(В конспекте Теорема 13, Следствие 4, Теорема 14, Следствие 5)

15) Китайская теорема об остатках. Порядок элемента прямого произведения. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (существование).

(В конспекте Теорема 12, Лемма 19, Определение 29, Теорема 15 (существование)).

16) Подгруппа кручения. Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (единственность). Единственность первой канонической формы конечно порожденной абелевой группы.

(В конспекте Определение 29, Теорема 15, Определение 30, Определение 31, Теорема 15, Следствие 6)

17) Экспонента группы. Критерий цикличности абелевой группы. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.

(В конспекте Определение 32, Лемма 20, Предложение 8, Предложение 9. Следствие 7)

18) Действие группы на множестве. Примеры действий. Три действия на себе. Связь между действиями и гомоморфизмами в $S(X)$. Орбиты и стабилизаторы. Стабилизаторы точек из одной орбиты.

(В конспекте Определение 33, Примеры 10, 11, 12, Лемма 21, Определение 34, Определение 35, Лемма 22, Лемма 23, Лемма 24, Следствие 8)

19) Связь между порядком орбиты и порядком стабилизатора. Порядок группы вращений куба. Изоморфизм группы вращений куба и S_4 . Изоморфизм группы симметрий правильного тетраэдра и S_4 .

(В конспекте Теорема 16, Следствие 9, Предложение 10, Предложение 12, Предложение 13)

20) Ядро неэффективности действия. Сведение действия к действию факторгруппы по нормальной подгруппе, лежащей в ядре неэффективности. Изоморфизм действий. Свободные и транзитивные действия. Классификация свободных транзитивных действий. Теорема Кэли.

(В конспекте Определение 36, Лемма 25, Предложение 11, Определение 37, Определение 38, Определение 39, Теорема 17, Теорема 18)

21) Действие сопряжениями. Центризаторы и классы сопряженности. Критерий нормальности подгруппы в терминах классов сопряженности. Классы сопряженности в S_n . Неединичность центра p -группы. Группы порядка p^2 .

(В конспекте Пример 12(3), Абзац перед замечанием 13, Лемма 26, Лемма 27, Определение 40, Теорема 19, Следствие 10)

22) Лемма Бернсайда. Пример применения.

(В конспекте Лемма 28, Пример 13)

23) Коммутатор элементов группы. Коммутант группы. Представление коммутанта как множества произведений коммутаторов. Нормальность коммутанта, фактор по коммутанту. Коммутант – наименьшая нормальная подгруппа, фактор по которой абелев.

(В конспекте Определение 41, Лемма 29, Определение 42, Лемма 30, Лемма 31, Лемма 32, Следствие 11, Лемма 33, Теорема 20)

24) Коммутанты S_n , A_n , $SL_n(F)$ и $GL_n(F)$ при $|F| \geq 4$.

(В конспекте Лемма 34, Теорема 21, Лемма 35, Теорема 22, Теорема 23.)

25) Характеристические подгруппы. Транзитивность свойства характеристичности. Характеристичность коммутанта и центра. Нормальность кратных коммутантов.

(В конспекте Определение 43, Лемма 37, Замечание 16, Предложение 14 и абзац после него.)

26) Разрешимые группы. Критерий разрешимости. Разрешимость S_n и A_n при $n \leq 4$. Не разрешимость S_n и A_n при $n \geq 5$. Разрешимость группы невырожденных верхнетреугольных матриц.

(В конспекте Лемма 36, Следствие 12, Определение 44, Примеры 14 и 15, Лемма 38, Лемма 39, Теорема 24, Следствие 13, Предложение 15, Теорема 25.)

27) Простые группы. Простота группы A_5 .

(В конспекте Определение 45, Предложение 16, Лемма 40, Лемма 41, Теорема 26, Замечание 17)

28) Простота группы $SO(3)$.

29) Первая теорема Силова

30) Вторая теорема Силова.