## Лекция 1

Центральным определением на несколько следующих лекций будет определение размерности кольца.

**Определение 1.** Пусть $R$ – кольцо. *Размерность Крулля* кольца $R$ – это точная верхняя грань длин цепей простых идеалов в $R$ минус 1 (при этом само кольцо простым идеалом не считается). То есть цепей вида

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \ldots \subsetneq P_d \subsetneq R.$$

Обозначать размерность Крулля мы будем $\dim R$.

*Замечание* 1. Имеется в виду, что если существует самая длинная цепочка вида

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \ldots \subsetneq P_d \subsetneq R,$$

то размерность $R$ равна $d$, а если самой длинной такой цепочки нет, то $\dim R = \infty$.

*Замечание* 2. В алгебраической геометрии размерность кольца, являющегося конечно порождённой алгеброй над полем, часто определяют как степень трансцендентности над этим полем. Минусом этого подхода является то, что не ясно, как определить размерность кольца, не имеющего указанный вид. Например, размерность кольца целых чисел. Однако в случае алгебр над полем два подхода дают одно и то же, что мы собираемся доказать.

**Пример 1.** *Пусть $F$ – поле. Тогда* $\dim F = 0$. *В самом деле, в поле есть ровно два идеала – это $\{0\}$ и всё $F$. Таким образом, самая длинная цепочка вложенных простых идеалов имеет вид*

$$P_0 = \{0\} \subsetneq F.$$

**Лемма 1.** *Пусть $R$ – кольцо главных идеалов, не являющееся полем. Тогда* $\dim R = 1$.

*Доказательство.* Допустим, что $P = (a) \subsetneq Q = (b)$ – два строго вложенных простых идеала. Тогда $a \in P \subseteq Q = (b)$, что означает $a = bc$ для некоторого $c \in R$. Если $b \in P$, то $P = Q$, что не верно. Значит, $b$ не лежит в $P$. Поскольку $P$ – простой идеал и $bc = a \in P$, получаем $c \in P = (a)$. Следовательно, $c = ad$, то есть $a = bad$. Это означает $a(1 - bc) = 0$. По определению кольцо главных идеалов целостно, а следовательно, либо $a = 0$, либо $b$ обратим. То есть либо $P = \{0\}$, либо $Q = R$. Таким образом, самая длинная цепочка простых идеалов имеет вид

$$\{0\} \subsetneq (a) \subsetneq R,$$

где $a$ – любой неприводимый элемент. $\square$

Дадим ещё несколько определений, связанных с размерностью колец. Они понадобятся нам позже.

**Определение 2.** Пусть $I$ – идеал в кольце $R$. Тогда $\dim I$ по определению равно $\dim R/I$.

**Определение 3.** Пусть $M$ – модуль над кольцом $R$. Тогда $\dim M$ по определению равно $\dim \operatorname{ann}(M)$.

**Определение 4.** Пусть $I \triangleleft R$ – простой идеал. Тогда его коразмерностью мы назовём $\operatorname{codim} I = \dim R_I$ (размерность локализации). Иногда также используют термины высота и ранг вместо коразмерности.

**Лемма 2.** *Пусть $I$ – простой идеал. Тогда* $\operatorname{codim} I$ *равно точной верхней грани цепочек убывающих простых идеалов в $R$, начинающихся с $I$, минус 1, то есть цепочек*

$$I \subsetneq P_d \subsetneq \ldots \subsetneq P_0.$$

*Доказательство.* Как мы знаем (см. предложение 1 и замечание 1 из лекции 3 первого семестра), отображение $J \to J \cap R$ устанавливает биекцию между простыми идеалами в $R[U^{-1}]$ и простыми идеалами в $R$, не пересекающимися с $U$. В нашем случае $U = R \setminus I$. Получаем биекцию между простыми идеалами в $R_I$ и простыми идеалами в $R$, содержащимися в $I$. При этом включения сохраняются. Отсюда следует результат. □

Начнём исследование понятия размерности с ответа на вопрос, для каких колец размерность равна нулю.

**Определение 5.** Кольцо $R$ является *артиновым*, если любая убывающая цепь идеалов конечна.

Мы хотим доказать, что кольца размерности ноль – это артиновы кольца. Но для этого нам нужна некоторая подготовка.

**Определение 6.** Модуль над $R$ является *артиновым*, если любая убывающая цепь подмодулей в $M$ конечна.

**Определение 7.** Модуль $M$ называется *простым*, если в нём нет подмодулей, кроме тривиальных, то есть нулевого и самого $M$.

**Определение 8.** Пусть $M$ – это $R$-модуль. Цепь подмодулей

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \ldots \supsetneq M_n = \{0\}$$

называется *композиционным рядом*, если фактор модули $M_j/M_{j+1}$ являются простыми.

**Определение 9.** Назовём длиной модуля $M$ ($\operatorname{length}(M)$) минимальное $n$ (если оно есть), для которого существует композиционный ряд

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \ldots \supsetneq M_n = \{0\}.$$

**Теорема 1.** *Пусть $R$ – кольцо и $M$ – это $R$-модуль. Тогда $M$ обладает конечным композиционным рядом если и только если $M$ артинов и нётеров. Более того, если $M$ обладает когечным композиционным рядом*

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \ldots \supsetneq M_n = \{0\},$$

*то*

*а) Любая цепь подмодулей в $M$ имеет длину не более $n$, причём её можно уплотнить до композиционного ряда;*

*б) Сумма отображений локализации $M \to M_P$, где $P$ пробегает все простые идеалы, задаёт изоморфизм $R$-модулей $M \cong \bigoplus M_P$. при этом ненулевыми будут только те слагаемые, где существует $M_j/M_{j+1} \cong R/P$, а число факторов $M_j/M_{j+1}$, изоморфных $R/P$ равно длине $M_P$.*

*в) $M = M_P$ тогда и только тогда, когда $M$ аннулируется некоторой степенью $P$.*

*Доказательство.* Пусть $M$ артинов и нётеров. Рассмотрим $M_1 \subsetneq M$ – максимальный (по включению) собственный подмодуль. (Такой существует по нётеровости.) Далее мы рассматриваем $M_2 \subsetneq M_1$ – максимальный по включению собственный подмодуль в $M_1$ и т.д. Получаем цепочку подмодулей

$$M \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \dots$$

По артиновости $M$ данная цепочка не может быть бесконечной, а следовательно, она закончится нулём (если бы последний модуль был ненулевой, то можно было бы продолжить нулём). По выбору подмодулей, уплотнить данный ряд невозможно, а значит, это композиционный ряд.

Мы доказали утверждение теоремы до пунктов в одну сторону. Далее мы бы хотели доказать пункт а), а после него вернуться к доказательству утверрждения до пунктов в другую сторону.

**а)** Сперва покажем, что если $M'$ – собственный подмодуль в модуле $M$, то $\operatorname{length}(M') < \operatorname{length}(M)$. Для этого рассмотрим цепочку

$$M' \subseteq M' \cap M_1 \subseteq M' \cap M_2 \subseteq \dots \subseteq M' \cap M_n,$$

где $M \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = \{0\}$ – самый короткий композиционный ряд для $M$. Имеем

$$(M' \cap M_i)/(M' \cap M_{i+1}) = ((M' \cap M_i) + M_{i+1})/M_{i+1} \subseteq M_i/M_{i+1}.$$

При этом модуль $M_i/M_{i+1}$ простой. Следовательно, либо $(M' \cap M_i)/(M' \cap M_{i+1}) = M_i/M_{i+1}$ и в этом случае $(M' \cap M_i) + M_{i+1}) = M_i$, либо $(M' \cap M_i)/(M' \cap M_{i+1}) \cong \{0\}$. Если мы имеем второй случай, то данный ряд можно укоротить и получить композиционный ряд для $M'$, что доказывает $\operatorname{length}(M') < \operatorname{length}(M)$. Допустим, что для всех $i$ имеет место первый случай, то есть $(M' \cap M_i) + M_{i+1}) = M_i$. Покажем обратной индукцией по $j$, что $M_j \subseteq M'$. База $j = n$, $M_n = \{0\} \subseteq M'$. Шаг. Пусть для всех $j' > j$ выполнено $M_{j'} \subseteq M'$. Тогда $M_j = (M' \cap M_j) + M_{j+1} \subseteq M'$. Поскольку $M_0 = M$ не содержится в $M'$, приходим к противоречию. Итак, $\operatorname{length}(M') < \operatorname{length}(M)$.

Пусть теперь $M$ – модуль с конечной длиной. Покажем индукцией по $\operatorname{length}(M)$, что для любой цепочки $M = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq \dots \supsetneq N_k$ подмодулей выполнено $k \leq \operatorname{length}(M)$.

*База индукции.* $\operatorname{length}(M) = 0$. Имеем, $M = \{0\}$, утверждение очевидно.

*Шаг индукции.* Рассмотрим цепочку $N_1 \supsetneq \dots \supsetneq N_k$. Так как $N_1 \subsetneq M$, по доказанному $\operatorname{length}(N_1) < \operatorname{length}(M)$. По предположению индукции,

$$k - 1 \leq \operatorname{length}(N_1) < \operatorname{length}(M).$$

Отсюда $k \leq \operatorname{length}(M)$.

Итак, доказано, что у любой цепи в $M$ длина ограницена $\operatorname{length}(M)$. Однако, если цепь подмодулей не образует композиционный ряд, то её можно уплотнять и тем самым удлиннять. Поскольку бесконечно удлиннять данную цепь не возможно, её можно уплотнить до композиционного ряда и его длина будет не более $\operatorname{length}(M)$ (и не менее по определению длины). Это завершает доказательство пункта а).

Так как мы выяснили, что любая цепь вложенных подмодулей ограницена по длине, модуль $M$ является нётеровым и артиновым, что завершает доказательство утверждения теоремы до пунктов. □

Остаток доказательства теоремы и вывод того, что размерность ноль имеют артиновы кольца будет на следующей лекции.