Лекция 19

Следующая теорема является ключевой в изучении представлений конечных групп. Она во многом сводит изучение любых конечномерных представлений к изучению неприводимых.

Теорема 1 (Теорема Машке)**.** *Пусть $|G| = n$ не делится на характеристику поля F. Тогда любое представление ρ группы G вполне приводимо.*

Доказательство. Для доказательства полной приводимости достаточно доказать, что у каждого инвариантного подпространства есть дополнительное инвариантное подпространство. Пусть $U \subset V$ – инвариантное подпространство. Рассмотрим некоторое (не обязательно инвариантное) дополнительное подпространство W, то есть выполнено $V = U \oplus W$. Можно рассмотреть проектор P на второе подпространство: $P(u+w) = w$. При этом $P^2 = P$.

Наша цель – изменить проектор P так, чтобы измененный проектор P' был также проектором вдоль U на некоторое <u>инвариантное</u> подпространства W'. Тогда $V = U \oplus W'$.

Определим

$$P' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ P \circ \rho(g)^{-1}.$$

Поскольку $P(u) = 0$ для любого $u \in U$, выполнено $P \circ \rho(g)^{-1}(u) = 0$. Получаем

$$P'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ P \circ \rho(g)^{-1}(u) = 0.$$

То есть $U \subset \operatorname{Ker} P'$. Поскольку P – проектор на W вдоль U, для любого $g \in G$ выполнено $P \circ \rho(g)^{-1}(v) - \rho(g)^{-1}(v) \in U$. Домножая на $\rho(g)$, получаем

$$\rho(g) \circ P \circ \rho(g)^{-1}(v) - v \in U.$$

Следовательно, $P'(v) - v \in U$. Применяя P', получаем $P'^2(v) - P'(v) = 0$. То есть $P'^2 = P'$, что означает, что P' – проектор на свой образ, который мы обозначим W'.

Если $P'(v) = 0$, то $-v = P'(v) - v \in U$. Значит, $\operatorname{Ker} P' = U$.

Мы уже доказали, что $V = U \oplus W'$. Осталось объяснить, что W' – инвариантное подпространство.

Докажем, что для любого $h \in G$ выполнено $\rho(h) \circ P' = P' \circ \rho(h)$.

$$\rho(h) \circ P' = \rho(h) \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ P \circ \rho(g)^{-1} \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg) \circ P \circ \rho(g)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{hg \in G} \rho(hg) \circ P \circ \rho(hg)^{-1} \right) \circ \rho(h) = P' \circ \rho(h).$$

Пусть $w' \in W'$, тогда существует $v \in V$ с условием $P'(v) = w'$. Имеем

$$\rho(g)(w') = \rho(g) \circ P'(v) = P' \circ \rho(g)(v) \subset W'.$$

Значит, W' инвариантно. □

Приведем примеры, показывающие, что условие конечности группы и условие, что $\mathrm{char} F \nmid n$ в теореме Машке существенные.

Пример 1 (уже был)**.** *Представление группы $\mathbb{Z}$ (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$):*

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приводимо, но не вполне приводимо. К этому примеру не применима теорема Машке, так как группа бесконечна.

Пример 2. *Представление группы $\mathbb{Z}_p$ (над полем $\mathbb{Z}_p$):*

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично предыдущему примеру, это представление приводимо, но не вполне приводимо .

Пример 3. *Мономиальное представление ρ группы S_n вполне приводимо. Оно раскладывается в прямую сумму 2-х подпредставлений. Первое подпредставление одномерно (и следовательно неприводимо) и является ограничением ρ на инвариантное подпространство $U = \langle e_1 + \ldots + e_n \rangle$.*

Второе подпредставление – это ограничесние ρ на инвариантное подпространство $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum x_i = 0\}$. Осталось объяснить, что $\rho\,|_W$ неприводимо.

Пусть $L \subset W$ – ненулевое инвариантное подпространство. Возьмем вектор

$$v = (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0) \in L.$$

Тогда найдутся $i \neq j$ такие, что $x_i \neq x_j$. Применим $\rho((i,j))$ к вектору v. При этом x_i и x_j поменяются местами. Тогда

$$v - \rho((i,j))(v) = (0, \ldots, x_i - x_j, 0, \ldots, 0, x_j - x_i, 0 \ldots, 0) \in L.$$

То есть $e_i - e_j \in L$. Применяя к $e_i - e_j$ оператор $\rho(\sigma)$, где $\sigma(i) = k$, $\sigma(j) = m$ получаем $e_k - e_m \in L$. Однако $\langle e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n \rangle = W$. То есть $L = W$.

Теорема 2 (Лемма Шура)**.** *Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ – два неприводимых представления. И пусть $\varphi\colon V \to W$ – морфизм этих представлений. Тогда*

1) если ρ и ζ не изоморфны, то $\varphi = 0$,

2) если ρ и ζ изоморфны, то φ – либо нулевое отображение, либо изоморфизм,

3) если $V = W$ – пространства над алгебраически замкнутым полем и $\rho = \zeta$, то $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}$.

Доказательство. 1 и 2) Докажем, что $\mathrm{Ker}(\varphi)$ является ρ-инвариантным подпространством в V. Действительно, пусть $v \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено $\zeta(g) \circ \varphi(v) = 0$. Однако $\zeta(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(g)$. Значит, $\rho(g)(v) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Следовательно, так как ρ неприводимо, либо $\mathrm{Ker}\,\varphi = V$ и тогда φ – нулевое отображение, либо $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$ и φ – инъекция.

Докажем, что $\mathrm{Im}\,\varphi \subset W$ является ζ-инвариантным подпространством. Возьмем $\varphi(v) \in \mathrm{Im}\,\varphi$ и применим ζ. Получаем $\zeta \circ \varphi(v) = \varphi \circ \rho(v) \in \mathrm{Im}\,\varphi$. Так как ζ – неприводимое представление, либо $\mathrm{Im}\,\varphi = \{0\}$ и тогда φ – нулевое отображение, либо φ – сюръекция.

Итак, либо $\varphi = 0$, либо φ – биекция, то есть изоморфизм.

3) Пусть F алгебраически замкнуто и $V = W$ и $\rho = \zeta$. Так как F алгебраически замкнуто, у оператора φ есть собственное значение λ. Тогда у оператора $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ есть нетривиальное ядро. Докажем, что $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ также является морфизмом. Действительно

$$\rho(g) \circ (\varphi - \lambda \mathrm{id}) = \rho(g) \circ \varphi - \lambda\rho = \varphi \circ \rho(g) - \lambda\rho = (\varphi - \lambda \mathrm{id}) \circ \rho(g).$$

По предыдущему тогда $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}) = V$, то есть $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}$. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ *и* $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ *– два неприводимых комплексных представления конечной группы* G*. И пусть* $\varphi\colon V \to W$ *– произвольное линейное отображение. Положим*

$$\widetilde{\varphi} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\zeta(g)\circ\varphi\circ\rho(g)^{-1}.$$

Тогда
1) если ρ *и* ζ *не изоморфны, то* $\widetilde{\varphi} = 0$,
2) если $V = W$ *и* $\rho = \zeta$, *то* $\widetilde{\varphi} = \lambda\,\mathrm{id}$, *где* $\lambda = \frac{tr\,\varphi}{\dim V}$.

Доказательство. Нужно проверить, что $\widetilde{\varphi}$ – морфизм представлений.

$$\zeta(g)\circ\widetilde{\varphi} = \zeta(g)\circ\left(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\zeta(h)\circ\varphi\circ\rho(h)^{-1}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\zeta(gh)\circ\varphi\circ\rho(h)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{gh\in G}\zeta(gh)\circ\varphi\circ\rho(gh)^{-1}\circ\rho(g) = \widetilde{\varphi}\circ\rho(g).$$

Из леммы Шура следуют оба утверждения. Причем

$$\lambda\dim V = \operatorname{tr}\lambda E = \operatorname{tr}\widetilde{\varphi} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{tr}\left(\rho(g)\circ\varphi\circ\rho(g)^{-1}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{tr}\varphi = \operatorname{tr}\varphi.$$

$\square$

Выберем некоторые базисы в V и W. Тогда представления ρ и ζ соответствуют матричным представлениям.

Определение 1. *Матричным элементом* ρ_{ij} называется функция $G \to F$, которая переводит элемент $g \in G$ в (i,j)-й элемент матрицы $\rho(g)$.

Определение 2. Пусть $|G|$ не делится на $\operatorname{char} F$. Введем следующую билинейную форму на множестве функций из G в F:

$$\langle f, h\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f(g)h(g^{-1}).$$

Следствие 2. *Если представления* ρ *и* ζ *не изоморфны, то для любых натуральных чисел* $1 \le a, b \le \dim W;\ 1 \le c, d \le \dim V$ *выполнено* $\langle\zeta_{ab}, \rho_{cd}\rangle = 0$.

Доказательство. Возьмем в следствии **??** отображение φ, задающееся в выбранных базисах матрицей E_{bc}. Тогда так как $\widetilde{\varphi} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\zeta(g)\circ\varphi\circ\rho(g)^{-1} = 0$, получаем
$0 = \widetilde{\varphi}_{ad} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i,j}\zeta_{ai}(g)\varphi_{ij}\rho_{jd}(g^{-1}) = = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\zeta_{ab}(g)\rho_{cd}(g^{-1}) = \langle\zeta_{ab}, \rho_{cd}\rangle$. $\square$

Следствие 3. *Пусть* $V = W$ *и* $\rho = \zeta$. *Тогда*

$$\langle\rho_{ab}, \rho_{cd}\rangle = \begin{cases}\frac{1}{\dim V}, & \text{если } a{=}d \text{ и } b{=}c;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Доказательство. Опять берем φ, задающееся матрицей E_{bc}. Получаем

$$\langle \rho_{ab}, \rho_{cd} \rangle = \left(\frac{\operatorname{tr}\varphi}{\dim V} \operatorname{id} \right)_{ad} = \begin{cases} \frac{1}{\dim V}, & \text{если a=d и b=c;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

□