Лекция 1

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – переменные.

Определение 1. *Линейным алгебраическим уравнением* от $x_1, \ldots, x_n$ называется уравнение вида
$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b,$$
где $a_1, \ldots, a_n, b$ – числа (пока что считаем, что вещественные, но в дальнейшем будут рассматриваться и другие варианты).

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ или СЛУ) – это система вида
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Числа $a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1, \ldots, b_m$ – *правыми частями* уравнений.

Определение 2. *Решение системы* – это упорядоченный набор чисел $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, которые при подстановке в каждое уравнение системы обращают его в верное равенство.

Определение 3. 1) СЛУ называется *совместной*, если существует хотя бы одно решение, и *несовместной*, если решений нет.

2) Совместная СЛУ называется *определенной*, если решение единственно, и *неопределенной*, если решений больше одного.

Простейшие примеры

- $\begin{cases} 2x = 4. \end{cases}$ совместная и определенная система
- $\begin{cases} 0x = 4. \end{cases}$ несовместная система.
- $\begin{cases} 0x = 0. \end{cases}$ совместная, но не определенная система.

Определение 4. *Решить* СЛУ – это описать все ее решения.

Что делать, если решений бесконечно много?

Пример 1. Рассмотрим систему из одного уравнения $\begin{cases} 2x + 3y = 4. \end{cases}$ Выразим одну переменную через другую:
$$x = \frac{4 - 3y}{2} = 2 - \frac{3}{2}y.$$
Ответ: y – любое, $x = 2 - \frac{3}{2}y$.

Определение 5. *Матрица* – это прямоугольная таблица, заполненная числами. На письме пишутся только эти числа (*элементы матрицы*) и вся матрица обводится либо в круглые скобки, либо в двойные прямые. Говорят, что матрица имеет размер $m \times n$, если у нее m строк и n столбцов.

Пример 2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} \text{ – это матрица } 2 \times 3.$$

Удобные обозначения:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}. \end{pmatrix}$$

Элемент a_{ij} находится на пересечении i-ой строки и j-го столбца.

С каждой СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

связаны две матрицы. Это *матрица коэффициентов*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и *расширенная матрица коэффициентов*

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Определение 6. Две СЛАУ называются <u>эквивалентными</u>, если множества их решений совпадают.

Мы изучим алгоритм решения СЛУ, который называется методом Гаусса.

План решения СЛУ методом Гаусса.

1) Ввести 3 типа элементарных преобразований СЛУ, которые переводят СЛУ в эквивалентную.

2) Привести элементарными преобразованиями систему к простому виду.

3) Решить получившуюся более простую систему.

Определение 7. *Элементарные преобразования I типа.* Фиксируем произвольное число λ. Возьмем i-е уравнение нашей СЛАУ

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

и прибавим его, умноженное на λ, к j-му

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j.$$

(Левую часть прибавим к левой, а правую – к правой.) Все уравнения, кроме j-го при этом не изменятся.

На j-ом месте получится уравнение

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n + \lambda(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) = b_j + \lambda b_i.$$

преобразуя, получаем

$$(a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1 + \ldots + (a_{jn} + \lambda a_{in})x_n = b_j + \lambda b_i.$$

С расширенной матрицей коэффициентов при этом происходит следующее (элементарное преобразование матрицы типа I): все строки, кроме j-ой не меняются, а к j-ой прибавляется i-я, умноженная на λ. (При умножении строки на λ умножается каждый ее элемент, а при сложении 2-х строк 1-й элемент складывется с 1-м, второй – со вторым и т.д.)

Пример 3. Прибавим в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ третью строку к первой с коэффициентом -7. Получим $\begin{pmatrix} -48 & -54 & -60 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Определение 8. *Элементарное преобразование II типа* меняет i-е и j-е уравнения. Соответствующее элементарное преобразование матрицы меняет i-ю и j-ю строки.

Определение 9. *Элементарное преобразование III типа* умножает и левую и правую часть i-го уравнения на некоторое число $c \neq 0$. При этом i-я строчка соответствующей расширенной матрицы коэффициентов умножается на c.

Теорема 1. *При элементарных преобразованиях мы переходим к эквивалентной системе.*

Доказательство. Пусть $(z_1, \ldots, z_n)$ – это некоторое конкретное решение старой СЛУ. Тогда $(z_1, \ldots, z_n)$ также является решением и преобразованной СЛУ. В самом деле, если уравнение не поменялось, то в него $(z_1, \ldots, z_n)$ подходит. Если обе части уравнения умножить на c, то при подстановке $(z_1, \ldots, z_n)$ получится верное равенство. Остается проверить для I типа: из равенств $a_{i1}z_1 + \ldots + a_{in}z_n = b_i$ и $a_{j1}z_1 + \ldots + a_{jn}z_n = b_j$ следует, что

$$(a_{j1} + \lambda a_{i1})z_1 + \ldots + (a_{jn} + \lambda a_{in})z_n = a_{j1}z_1 + \ldots + a_{jn}z_n + \lambda(a_{i1}z_1 + \ldots + a_{in}z_n) = b_j + \lambda b_i$$

Таким образом, любое решение старой СЛУ – это и решение новой, то есть множество решений не уменьшилось. С другой стороны обратное к элементарному преобразование также элементарно. В самом деле, обратное к элементарному преобразованию 1 типа, которое прибавляет i-е уравнение с коэффициентом λ к j-му, есть снова элементарное преобразование 1 типа, которое прибавляет i-е уравнение с коэффициентом $-\lambda$ к j-му. Элементарное преобразование 2 типа обратно само себе. Обратное к элементарному преобразованию 3 типа, которое умножает i-е уравнение на c, есть снова элементарное преобразование 3 типа, которое умножает i-е уравнение на $\frac{1}{c}$. А значит, любое решение новой системы является решением старой. То есть множества решений совпадают. $\square$

Определение 10. *Лидер* (ведущий элемент) ненулевой строки матрицы – это самое левое ненулевое число.

Пример 4. В следующей матрице лидеры помечены жирным шрифтом

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & \mathbf{4} & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 11. Матрица называется *ступенчатой*, если все нулевые строки (если они есть) стоят снизу, а номера столбцов, в которых стоят лидеры ненулевых строк, образуют строго возрастающую последовательность (при движении по строкам сверху вниз).

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Прямой ход метода Гаусса. Наша цель – привести матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду.

Шаг алгоритма. Выбираем самый левый не полностью нулевой столбец матрицы. (Если такого нет, то матрица нулевая, а значит, ступенчатая.) Пусть его номер k. Перестановкой строк, если нужно, делаем так, чтобы ненулевым был элемент в 1 строке k-го столбца. Затем вычитаем первую строку из остальных с нужными коэффициентами так, чтобы все элементы k-го столбца, кроме того, что стоит в 1 строке, стали равны нулю. Переходим к рассмотрению матрицы без 1 строки и без первых k столбцов. То есть далее мы повторяем шаг для этой более маленькой матрицы. Элементарные преобразования с ее строками можно интерпретировать как элементарные преобразования со строками начальной матрицы с 2-ой (в первых k столбцах у них стоят нули и элементарные преобразования этого не испортят).

Обратный ход метода Гаусса. Теперь наша цель – решить систему со ступенчатой матрицей.

Определение 12. Назовем уравнение *экзотическим*, если оно имеет вид $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, где $b \neq 0$.

Экзотическое уравнение есть в нашей системе тогда и только тогда, когда последняя ступенька матрицы имеет длину 1, то есть лидер последней ненулевой строки стоит в последнем столбце. Если в нашей системе есть экзотическое уравнение, то она несовместна. Сейчас мы увидим, что в случае, когда экзотического уравнения нет, система всегда совместна.

Пусть экзотических уравнений нет. Переменные соответствуют столбцам матрицы (кроме последнего, он соответствует правым частям). Назовем те переменные, в столбцах которых есть лидеры, *главными*, а остальные *свободными*.

Пример 5. Для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ главными являются x_2 и x_4, а свободными – x_1 и x_3.

Теорема 2. *Для каждого набора значений свободных переменных существует единственный набор значений главных переменных, который дополняет данный набор до решения системы.*

Доказательство. Идем по строкам нашей матрицы снизу-вверх. Рассмотрим последнюю ненулевую строку. Пусть ее номер l. В соответствующем уравнении есть ровно одна главная переменная, пусть это x_s, причем она входит с коэффициентом $a_{ls} \neq 0$.

$$0x_1 + \ldots + 0x_{s-1} + a_{ls}x_s + \ldots + a_{ln}x_n = b_l.$$

Выразим x_s через свободные:

$$x_s = \frac{b_l - a_{l,s+1}x_{s+1} - \ldots - a_{ln}x_n}{a_{ls}}.$$

Далее переходим к следующей ненулевой строке. В соответствующее уравнение входит 2 главных переменных: x_s (с возможно нулевым коэффициентом $a_{l-1,s}$) и новая главная переменная x_p с ненулевым коэффициентом $a_{l-1,p}$:

$$0x_1 + \ldots + 0x_{p-1} + a_{l-1,p}x_p + \ldots + a_{l-1,s}x_s + \ldots + a_{l-1,n}x_n = b_{l-1}.$$

Выражаем x_p через остальные и подставляем выражение x_s через свободные. Получается выражение x_p только через свободные переменные. И т.д. □

Заметим, что если свободных переменных нет, то главные выражаются только через правые части, то есть принимают единственное значение.

Итоговый ответ к системе получается в следующем виде: либо система несовместна, либо есть разбиение всех переменных на главные и свободные, свободные принимают произвольные значения, а главные выражены через свободные.

Замечание 1. Форма ответа не единственная. Например, часто можно выбрать другие переменные свободными. Нужно лишь, чтобы в каждое новое уравнение при движении снизу вверх входила ровно одна новая главная переменная.

Предложение 1. *Количество решений у СЛУ (над $\mathbb{R}$) может быть либо ноль, либо 1, либо бесконечность.*

Доказательство. Если система совместна и есть хотя бы одна свободная переменная, то она может принимать любые значения, а значит, количество решений бесконечно. Если же система совместна, но все переменные главные, то они выражаются однозначно лишь через правые части, то есть имеется ровно одно решение. □

Сформулируем результат предыдущего предложения более явно. Назовем матрицу *строго ступенчатой*, если она ступенчатая и в каждом столбце кроме последнего есть лидер строки. Из этого сразу следует, что количество ненулевых строк равно количеству переменных.

Следствие 1.
- *СЛУ несовместна тогда и только тогда, когда в ступенчатом виде есть экзотическое уравнение.*
- *СЛУ определена тогда и только тогда, когда ступенчатый вид расширенной матрицы коэффициентов является строго ступенчатым.*
- *В любом случае, кроме перечисленных двух, у СЛУ бесконечное количество решений.*

Замечание 2. В предложении 1 и следствии 1 важно, что чисел бесконечно много. Когда мы будем рассматривать другие множества чисел, это может оказаться не верным. Впрочем, обговорим это, когда наступит необходимость, а пока считаем, что числа вещественные.