Лекция 4

Определение 1. Пусть $\varphi\colon G \to H$ – гомоморфизм групп. Ядром гомоморфизма φ называется множество
$$\operatorname{Ker}\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\} \subseteq G.$$
Образом гомоморфизма φ называется множество
$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\} \subseteq H.$$

Поскольку $\varphi(e) = e$, нейтральный элемент всегда лежит в ядре.

Лемма 1. *Пусть $\varphi\colon G \to H$ – гомоморфизм. Тогда*
а) Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ – нормальная подгруппа в группе G.
б) $\operatorname{Im}\varphi$ – подгруппа в H.

Доказательство. а) Пусть $g_1, g_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = e\cdot e = e$. Значит, $g_1g_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$. То есть ядро замкнуто относительно операции. Кроме того
$$\varphi(g_1^{-1}) = \varphi(g_1^{-1})\varphi(g_1) = \varphi(g_1^{-1}g_1) = \varphi(e) = e.$$
Значит, $g_1^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Таким образом, ядро замкнуто относительно взятия обратного. Осталось заметить, что $e \in \operatorname{Ker}\varphi$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\varphi$ – подгруппа в G.

Докажем, что подгруппа $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq G$ нормальна. Пусть $g \in G$, $h \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда
$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e.$$
Значит, $ghg^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$, то есть $\operatorname{Ker}\varphi$ – нормальная подгруппа.

б) Пусть $h_1, h_2 \in \operatorname{Im}\varphi$. Тогда найдутся $g_1, g_2 \in G$ такие, что $h_1 = \varphi(g_1)$, $h_2 = \varphi(g_2)$. Тогда $h_1h_2 = \varphi(g_1g_2) \in \operatorname{Im}\varphi$ и $h_1^{-1} = \varphi(g_1^{-1}) \in \operatorname{Im}\varphi$. Кроме того $e = \varphi(e) \in \operatorname{Im}\varphi$. То есть образ замкнут относительно операции, взятия обратного и содержит единицу. Следовательно, $\operatorname{Im}\varphi$ – подгруппа в H. □

Теорема 1. *(Теорема о гомоморфизме) Пусть $\varphi\colon G \to \widetilde{G}$ – гомоморфизм групп. Тогда $G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение
$$\Psi\colon G/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi, \qquad \Psi(g\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(g).$$

Сперва нам надо проверить корректность отображения Ψ, то есть то, что оно не зависит от выбора представителя g из смежного класса. Для этого заметим, что если $g\operatorname{Ker}\varphi = g'\operatorname{Ker}\varphi$, то $g'^{-1}g = h \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $g = g'h$. Получаем $\varphi(g) = \varphi(g'h) = \varphi(g')\varphi(h) = \varphi(g')e = \varphi(g')$. Таким образом, отображение Ψ определено корректно.

Докажем, что Ψ – изоморфизм. То, что Ψ –гомоморфизм следует из равенства:
$$\Psi((g\operatorname{Ker}\varphi)(f\operatorname{Ker}\varphi)) = \Psi(gf\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(gf) = \varphi(g)\varphi(f) = \Psi(g\operatorname{Ker}\varphi)\Psi(f\operatorname{Ker}\varphi).$$
Инъективность Ψ проверим по критерию инъективности. Если $g\operatorname{Ker}\varphi \in \operatorname{Ker}\Psi$, то $\Psi(g\operatorname{Ker}\varphi) = \varphi(g) = e$. Значит, $g \in \operatorname{Ker}\varphi$. То есть $g\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$ – единица фактор-группы. Сюръективность Ψ очевидна, так как для любого элемента $\varphi(g)$ в $\operatorname{Im}\varphi$ в него отображается смежный класс $g\operatorname{Ker}\varphi$. □

Пример 1. *Найдем, чему изоморфна факторгруппа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ по теореме о гомоморффизме. Для того, чтобы применить теорему о гомоморфизме, нам нужно построить гомоморфизм $\varphi\colon Z \to G'$ для некторой группы G' такой, что $\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$. Легко видеть, что подходит следующий гомоморфизм*
$$\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, \qquad k \mapsto k \pmod n$$

Действительно, φ – гомоморфизм, $\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$ *и φ – сюръекция, то есть* $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{Z}_n$. *По теореме о гомоморфизме* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

Теорема 2. *(Критерий инъективности гомоморфизма) Гомоморфизм $\varphi\colon G \to H$ инъективен тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{e\}$. Тогда существует $g \neq e$, $g \in \operatorname{Ker}\varphi$. То есть $\varphi(g) = e = \varphi(e)$. Следовательно, гомоморфизм φ не инъективен.

Допустим, гомоморфизм φ не инъективен. Тогда $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ для некоторых $g_1 \neq g_2 \in G$. Значит, $\varphi(g_1g_2^{-1}) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} = e$. То есть $g_1g_2^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$, но $g_1g_2^{-1} \neq e$. Значит, $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{e\}$. □

Особый интерес представляют гомоморфизмы и изоморфизмы из группы в себя.

Определение 2. Изомомрфизм $\varphi\colon G \to G$ называется *автоморфизмом.*

Легко видеть, что композиция двух автоморфизмов – это автоморфизм. Множество автоморфизмов группы G с операцией композиции образует группу $\operatorname{Aut}(G)$ с нейтральным элементом id.

Пусть g – элемент группы G. Рассмотрим отображение $\varphi_g\colon G \to G$, определенное по правилу $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$.

Лемма 2. *Отображение φ_g является автоморфизмом группы G.*

Доказательство. Проверим, что φ_g – гомоморфизм:

$$\varphi_g(hf) = ghfg^{-1} = ghg^{-1}gfg^{-1} = \varphi_g(h)\varphi_g(f).$$

То, что φ_g – биекция следует из того, что существует обратное отображение. А именно, обратное к φ_g отображение – это $\varphi_{g^{-1}}$. □

Автоморфизм называются *внутренним*, если он имеет вид φ_g для некоторого $g \in G$.

Предложение 1. *Множество внутренних автоморфизмов с операцией композиции образует подгруппу* $\operatorname{Inn}(G)$ *в* $\operatorname{Aut}(G)$.

Доказательство. Докажем равенство $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$. Для этого применим этот гомоморфизм к элементу $s \in G$:

$$\varphi_g \circ \varphi_h(s) = \varphi_g(\varphi_h(s)) = \varphi_g(hsh^{-1}) = ghsh^{-1}g^{-1} = (gh)s(gh)^{-1} = \varphi_{gh}(s).$$

Из доказанного равенства следует замкнутость $\operatorname{Inn}(G)$ относительно композиции. Кроме того $\mathrm{id} = \varphi_e \in \operatorname{Inn}(G)$. Осталось проверить, что $\operatorname{Inn}(G)$ замкнуто относительно взятия обратного. Для этого заметим, что $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_e = \mathrm{id}$. □

Определение 3. Центр группы G – это множество $Z(G)$ элементов, коммутирующих со всеми элементами группы. $Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in G : gz = zg\}$.

Лемма 3. *Центр – это нормальная подгруппа в G. Факторгруппа $G/Z(G)$ изоморфна группе внутренних автоморфизмов* $\operatorname{Inn}(G)$.

Доказательство. Чтобы доказать сразу оба утверждения, рассмотрим гомоморфизм

$$\Psi\colon G \to \operatorname{Inn}(G), \qquad \Psi(g) = \varphi_g.$$

Докажем, что Ψ – гомоморфизм. В самом деле

$$\varphi_{g_1g_2}(x) = g_1g_2x(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2xg_2^{-1}g_1^{-1} = g_1(g_2xg_2^{-1})g_1^{-1} = \\ = \varphi_{g_1}(g_2xg_2^{-1}) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x).$$

Так как это верно для любого x, получаем $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$. Следровательно,

$$\Psi(g_1 g_2) = \varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \Psi(g_1) \circ \Psi(g_2).$$

Итак, Ψ – гомоморфизм. Найдём ядро Ψ. То, что $\varphi_g = \Psi(g) = \mathrm{id}$ равносильно тому, что для каждого $x \in G$ выполнено $gxg^{-1} = x$, что равносильно $gx = xg$. Таким образом, $\operatorname{Ker} \Psi = Z(G)$. Это показывает, что $Z(G)$ – нормальная подгруппа в G.

По теореме о гомоморфизме $G/Z(G) \cong \operatorname{Im} \Psi$. Однако гомоморфизм Ψ очевидно сюръективен, то есть $\operatorname{Im} \Psi = \operatorname{Inn}(G)$. Получаем $G/Z(G) \cong \operatorname{Inn}(G)$. $\square$