Лекция 16.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

sgayf@yandex.ru
@sgayf

5 мая, 2026

Определение.

Линейным представлением группы G называется гомоморфизм $G \to \mathrm{GL}(V)$.

Определение. Матричным представлением группы G называется гомоморфизм $G \to \mathrm{GL}_n(F)$.

Выбор базиса в V устанавливает биекцию между линейными и матричными представлениями. Если выбрать другой базис, то все операторы представления сопрягутся матрицей перехода. Размерностью представления называется размерность пространства V. Мы ограничимся рассмотрением конечномерных представлений.

Определение.

Представление $G \to \mathrm{GL}(V)$ называется точным, если его ядро состоит только из нейтрального элемента.

Определение

Пусть даны представления $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}(W)$. Морфизмом представлений называется линейное отображение $\varphi\colon V \to W$ такое, что для каждого $g \in G$ и для каждого $v \in V$ выполнено $\varphi(\rho(g)(v)) = \zeta(g)(\varphi(v))$.
Если φ – изоморфизм векторных пространств, то мы называем его изоморфизмом представлений.

Замечание. Если ρ и ζ – изоморфные линейные представления, то пространства V и W можно отождествить по изоморфизму φ. При этом базис V перейдет в базис W.
Если взять эти соответствующие друг другу базисы и получить матричные представления, то получим одинаковые матричные представления.
Таким образом, матричные представления $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(F)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}_n(F)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица C такая, что для каждого $g \in G$ выполнено $C\rho(g)C^{-1} = \zeta(g)$.

Определение.

Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ – линейное представление. Подпространство $U \subset V$ называется <u>инвариантным</u>, если для любого $g \in G$ выполнено $\rho(g)(U) \subset U$.

Определение.

Представление $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ называется <u>неприводимым</u> если не существует инвариантных подпространств $U \subset V$ кроме $\{0\}$ и V.

Пример.

Группа S_3 изоморфна группе симметрий треугольника D_3. Построим следующее двумерное представление группы S_3. Поместим начало координат в центр треугольника. Тогда любая симметрия треугольника задает линейное преобразование плоскости. Например, повороты запишутся матрицами

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Данное представление неприводимо (даже над $\mathbb{C}$).

В самом деле, если двумерное представление приводимо, то у всех его операторов есть общий собственный вектор. Если взять треугольник с горизонтальной стороной, то одна из симметрий запишется матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. У такой матрицы два собственный вектора (с точностью до пропорциональности): $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Но ни один из них не является собственным вектором матриц поворотов.

Определение.

Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ – два представления одной и той же группы G. Прямой суммой представлений ρ и ζ называется представление $\rho \oplus \zeta\colon G \to \mathrm{GL}(V \oplus W)$, определенное по правилу:

$$\rho \oplus \zeta(g)(v + w) = \rho(g)(v) + \zeta(g)(w).$$

Если выбрать базис в $V \oplus W$, являющийся объединением базисов V и W, то матрица оператора $\rho \oplus \zeta(g)$ имеет в этом базисе блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \zeta(g) \end{pmatrix}.$$

Определение.

Представление называется вполне приводимым, если оно изоморфно прямой сумме неприводимых.

Замечание.

В частности любое неприводимое представление вполне

Пример не вполне приводимого представления.

Рассмотрим следующее представление группы $\mathbb{Z}$ (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$):

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно, что $\langle e_1 \rangle$ – инвариантное подпространство. Но если бы это представление было вполне приводимым, оно бы раскладывалось в сумму двух одномерных. Тогда в подходящем базисе все матрицы были бы диагональны. Однако матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не диагонализуема.

Теорема.

У группы G ровно $|G/G'|$ одномерных представлений.

Теорема.

Если F – алгебраически замкнутое поле, то любое неприводимое представление ρ абелевой группы G одномерно.

Предложение.

Если для любого инвариантного подпространства найдется дополнительное инвариантное подпространство, то представление вполне приводимо.

Доказательство. Докажем по индукции по размерности представления n. База при $n = 1$ очевидна.
Шаг индукции. Если ρ неприводимо, то оно вполне приводимо. Пусть это не так. Тогда есть инвариантное подпространство $U \subset V$. Тогда $V = U \oplus U'$, где U' – дополнительное инвариантное подпространство. И значит, $\rho = \rho\left|_U \oplus \rho\right|_{U'}$. По предположению индукции представления $\rho\left|_U\right.$ и $\rho\left|_{U'}\right.$ вполне приводимы. Тогда ρ также вполне приводимо.

Определение

Пусть $V = U \oplus W$ – разложение векторного пространства в прямую сумму. Оператор $P\colon V \to V$ называется *проектором на W вдоль U*, если $P(u + w) = w$.

Легко видеть, что если P – проектор на W вдоль U, то $\operatorname{Ker} P = U$, $\operatorname{Im} P = W$. И кроме того $P^2 = P$, так как $P^2(u + w) = P(w) = P(0 + w) = w$.

Лемма

Если для некоторого оператора $P\colon V \to V$ выполнено $P^2 = P$, то $V = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$ и P есть проектор на $\operatorname{Im} P$ вдоль $\operatorname{Ker} P$.

Доказательство Для краткости обозначим $U = \operatorname{Ker} P$, $W = \operatorname{Im} P$. Пусть $v \in V$. Тогда $P(v) \in W$. Представим $v = P(v) + (v - P(v))$. Имеем

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0.$$

Значит, $v - P(v) \in U$. Таким образом, любой вектор $v \in V$ может быть представлен как сумма вектора $v - P(v) \in U$ и $P(v) \in W$. То есть $V = U + W$. Так как $\dim\ U + \dim\ W = \dim \operatorname{Ker} P + \dim \operatorname{Im} P = \dim\ V$, получаем $V = U \oplus W$.

Любой вектор из V может быть представлен как сумма $u + w$, где $u \in U$ и $w \in W$. Тогда $w = P(v)$ для некоторого вектора $v \in V$. При этом

$$P(u + w) = P(u) + P(w) = 0 + P(P(v)) = P^2(v) = P(v) = w.$$

Теорема Машке. Пусть $|G| = n$ не делится на характеристику поля F. Тогда любое представление ρ группы G вполне приводимо.

Доказательство. Для доказательства полной приводимости достаточно доказать, что у каждого инвариантного подпространства есть дополнительное инвариантное подпространство. Пусть $U \subset V$ – инвариантное подпространство. Рассмотрим некоторое (не обязательно инвариантное) дополнительное подпространство W, то есть выполнено $V = U \oplus W$. Можно рассмотреть проектор P на второе подпространство: $P(u + w) = w$. При этом $P^2 = P$. Напомним, что любой оператор Q с условием $Q^2 = Q$ является проектором на $\mathrm{Im}\, Q$ вдоль $\mathrm{Ker}\, Q$. Наша цель – изменить проектор P так, чтобы измененный проектор P' был также проектором вдоль U на некоторое инвариантное подпространства W'. Тогда $V = U \oplus W'$.

Продолжение доказательства.

Определим

$$P' = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)P\rho(g)^{-1}.$$

Поскольку $P(u) = 0$ для любого $u \in U$, выполнено $P\rho(g)^{-1}(u) = 0$. Получаем

$$P'(u) = \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_{g\in G}\rho(g)P\rho(g)^{-1}(u) = 0.$$

То есть $U \subset \operatorname{Ker} P'$. Поскольку P – проектор на W вдоль U, для любого $g \in G$ выполнено $P\rho(g)^{-1}(v) - \rho(g)^{-1}(v) \in U$. Домножая на $\rho(g)$, получаем $\rho(g)P\rho(g)^{-1}(v) - v \in U$. Следовательно, $P'(v) - v \in U$. Применяя P', получаем $P'^2(v) - P'(v) = 0$. То есть $P'^2 = P'$, что означает, что P' – проектор на свой образ, который мы обозначим W'. Если $P'(v) = 0$, то $-v = P'(v) - v \in U$. Значит, $\operatorname{Ker} P' = U$.

Продолжение доказательства.

Мы уже доказали, что $V = U \oplus W'$. Осталось объяснить, что W' – инвариантное подпространство.

Докажем, что для любого $h \in G$ выполнено $\rho(h)P' = P'\rho(h)$.

$$\rho(h)P' = \rho(h)\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)P\rho(g)^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(hg)P\rho(g)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{hg\in G}\rho(hg)P\rho(hg)^{-1}\rho(h) = P'\rho(h).$$

Пусть $w' \in W'$, тогда существует $v \in V$ с условием $P'(v) = w'$.

Имеем $\rho(g)(w') = \rho(g)P'(v) = P'\rho(g)(v) \subset W'$.

Значит, W' инвариантно.

Приведем примеры, показывающие, что условие конечности группы и условие, что $\mathrm{char}\, F \nmid n$ в теореме Машке существенные.

Пример 1 (уже был).

Представление группы $\mathbb{Z}$ (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$):

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приводимо, но не вполне приводимо. К этому примеру не применима теорема Машке, так как группа бесконечна.

Пример 2.

Представление группы $\mathbb{Z}_p$ (над полем $\mathbb{Z}_p$):

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично примеру 1, это представление приводимо, но не вполне приводимо .

Пример.

Мономиальное представление ρ группы S_n вполне приводимо. Оно раскладывается в прямую сумму 2-х подпредставлений. Первое подпредставление одномерно (и следовательно неприводимо) и является ограничением ρ на инвариантное подпространство $U = \langle e_1 + \ldots + e_n \rangle$.

Второе подпредставление – это ограничесние ρ на инвариантное подпространство $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum x_i = 0\}$.

Осталось объяснить, что $\rho\,|_W$ неприводимо.

Пусть $L \subset W$ – ненулевое инвариантное подпространство. Возьмем вектор $v = (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0) \in L$. Тогда найдутся $i \neq j$ такие, что $x_i \neq x_j$. Применим $\rho((i,j))$ к вектору v. При этом x_i и x_j поменяются местами. Тогда $v - \rho((i,j))(v) = (0, \ldots, x_i - x_j, 0, \ldots, 0, x_j - x_i, 0 \ldots, 0) \in L$. То есть $e_i - e_j \in L$. Применяя к $e_i - e_j$ оператор $\rho(\sigma)$, где $\sigma(i) = k$, $\sigma(j) = m$ получаем $e_k - e_m \in L$. Однако $\langle e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n \rangle = W$. То есть $L = W$.

Лемма Шура. Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\zeta\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ – два неприводимых представления. И пусть $\varphi\colon V \to W$ – морфизм этих представлений. Тогда
1) если ρ и ζ не изоморфны, то $\varphi = 0$,
2) если ρ и ζ изоморфны, то φ – либо нулевое отображение, либо изоморфизм,
3) если $V = W$, $\rho = \zeta$ и представления над алгебраически замкнутым полем, что $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}$.

Доказательство. 1 и 2) Докажем, что $\mathrm{Ker}(\varphi)$ является ρ-инвариантным подпространством в V. Действительно, пусть $v \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Тогда для любого $g \in G$ выполнено $\zeta(g) \circ \varphi(v) = 0$. Однако $\zeta(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(g)$. Значит, $\rho(g)(v) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Следовательно, так как ρ неприводимо, либо $\mathrm{Ker}\,\varphi = V$ и тогда φ – нулевое отображение, либо $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$ и φ – инъекция.

Продолжение доказательства.

Докажем, что $\operatorname{Im}\varphi \subset W$ является ζ-инвариантным подпространством. Возьмем $\varphi(v) \in \operatorname{Im}\varphi$ и применим $\zeta(g)$. Получаем $\zeta(g) \circ \varphi(v) = \varphi \circ \rho(g)(v) \in \operatorname{Im}\varphi$. Так как ζ – неприводимое представление, либо $\operatorname{Im}\varphi = \{0\}$ и тогда φ – нулевое отображение, либо φ – сюръекция.

Итак, либо $\varphi = 0$, либо φ – биекция, то есть изоморфизм.

3) Если F алгебраически замкнуто и $V = W$, то у оператора φ есть собственное значение λ. Тогда у оператора $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ есть нетривиальное ядро. По предыдущему тогда $\varphi - \lambda\,\mathrm{id} = 0$.