

Лекция 17.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

12 мая, 2026

Лемма Шура (Было).

Пусть $\rho: G \rightarrow GL(V)$ и $\zeta: G \rightarrow GL(W)$ – два неприводимых представления. И пусть $\varphi: V \rightarrow W$ – морфизм этих представлений. Тогда

- 1) если ρ и ζ не изоморфны, то $\varphi = 0$,
- 2) если ρ и ζ изоморфны, то φ – либо нулевое отображение, либо изоморфизм,
- 3) если $V = W$, $\rho = \zeta$ и представления над алгебраически замкнутым полем, то $\varphi = \lambda \text{id}$.

Следствие 1. Пусть $\rho: G \rightarrow GL(V)$ и $\zeta: G \rightarrow GL(W)$ – два неприводимых комплексных представления конечной группы G . И пусть $\varphi: V \rightarrow W$ – произвольное линейное отображение.

Положим

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta(g) \circ \varphi \circ \rho(g)^{-1}$$

Тогда

- 1) если ρ и ζ не изоморфны, то $\tilde{\varphi} = 0$,
- 2) если $V = W$ и $\rho = \zeta$, то $\tilde{\varphi} = \lambda \text{id}$, где $\lambda = \frac{\text{tr } \varphi}{\dim V}$.

Доказательство. Нужно проверить, что $\tilde{\varphi}$ – морфизм представлений.

$$\begin{aligned} \zeta(g) \circ \tilde{\varphi} &= \zeta(g) \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \zeta(h) \circ \varphi \circ \rho(h)^{-1} \right) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \zeta(gh) \circ \varphi \circ \rho(h)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{gh \in G} \zeta(gh) \circ \varphi \circ \rho(gh)^{-1} \circ \rho(g) = \tilde{\varphi} \circ \rho(g). \end{aligned}$$

Из леммы Шура следуют оба утверждения. Причем

$$\begin{aligned} \lambda \dim V &= \text{tr } \lambda E = \text{tr } \tilde{\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr} (\rho(g) \circ \varphi \circ \rho(g)^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \varphi = \text{tr } \varphi. \end{aligned}$$

Выберем некоторые базисы в V и W . Тогда представления ρ и ζ соответствуют матричным представлениям.

Определение.

Матричным элементом ρ_{ij} называется функция $G \rightarrow F$, которая переводит элемент $g \in G$ в (i, j) элемент матрицы $\rho(g)$.

Определение.

Пусть $|G|$ не делится на $\text{char } F$. Введем следующую билинейную форму на множестве функций из G в F :

$$\langle f, h \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)h(g^{-1}).$$

Следствие 2. Если представления ρ и ζ не изоморфны, то для любых $1 \leq a, b \leq \dim W$; $1 \leq c, d \leq \dim V$ выполнено $\langle \zeta_{ab}, \rho_{cd} \rangle = 0$.

Следствие 2. Если представления ρ и ζ не изоморфны, то для любых $1 \leq a, b \leq \dim W$; $1 \leq c, d \leq \dim V$ выполнено $\langle \zeta_{ab}, \rho_{cd} \rangle = 0$.

Доказательство. Возьмем в следствии 1 отображение φ , задающееся в выбранных базисах матрицей E_{bc} . Тогда так как $\tilde{\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta(g) \circ \varphi \circ \rho(g)^{-1} = 0$, получаем

$$0 = \tilde{\varphi}_{ad} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} \zeta_{ai}(g) \varphi_{ij} \rho_{jd}(g^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta_{ab}(g) \rho_{cd}(g^{-1}) = \langle \zeta_{ab}, \rho_{cd} \rangle.$$

Следствие 3. Пусть $V = W$ и $\rho = \zeta$. Тогда

$$\langle \rho_{ab}, \rho_{cd} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\dim V}, & \text{если } a=d \text{ и } b=c; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Опять берем φ , задающееся матрицей E_{bc} . Получаем

$$\langle \rho_{ab}, \rho_{cd} \rangle = \left(\frac{\text{tr } \varphi}{\dim V} \text{id} \right)_{ad} = \begin{cases} \frac{1}{\dim V}, & \text{если } a=d \text{ и } b=c; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение

Характером конечномерного представления $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_n(F)$ называется функция $\chi_\rho: G \rightarrow F$, где $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr} \rho(g)$.

Замечание.

Если мы возьмем изоморфное матричное представление ρ' , то $\mathrm{tr} \rho'(g) = \mathrm{tr} C \rho(g) C^{-1} = \mathrm{tr} \rho(g)$. То есть характеры изоморфных представлений совпадают. В частности характер можно связать с линейным (а не матричным) представлением, так как он не зависит от того, какой базис мы выбрали.

Далее мы будем в основном интересоваться комплексными характерами, то есть характерами комплексных представлений.

Будем говорить, что характер неприводим, если соответствующее представление неприводимо.

Предложение. Пусть χ_ρ – характер комплексного представления ρ в пространстве V . Тогда

1) $\chi_\rho(e) = \dim V$;

2) $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$, то есть характеры постоянны на классах сопряженности;

3) $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ для любого элемента g конечного порядка;

4) если $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, то $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.

Доказательство. 1) Единичный элемент группы при представлении переходит в единичную матрицу, ее след равен размерности пространства.

2) $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \text{tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) = \text{tr} \rho(g) = \chi_\rho(g)$.

3) $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ для любого элемента g конечного порядка.

3) Если $g \in G$ – элемент порядка n , то $\rho(g)$ – диагонализуемая матрица, собственные значения которой – корни n -ой степени из 1. То есть в некотором базисе

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{\dim V} \end{pmatrix},$$

$$\rho(g^{-1}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{\dim V}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\varepsilon_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{\varepsilon_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{\varepsilon_{\dim V}} \end{pmatrix}$$

Так как если $\varepsilon_i = (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то

$$\varepsilon_i^{-1} = (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \overline{\varepsilon_i}.$$

4) если $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, то $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.

В базисе, состоящем из базисов подпространств, на которых реализуются представления ρ_1 и ρ_2 , имеем

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\text{tr } \rho(g) = \text{tr } \rho_1(g) + \text{tr } \rho_2(g)$.

Определение.

Обозначим пространство всех функций $G \rightarrow \mathbb{C}$ через \mathbb{C}^G .

Функцию будем называть центральной, если она постоянна на классах сопряженности.

Лемма. Если группа G конечно, то полуторалинейная форма $(f, h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{h(g)}$ $f, h \in \mathbb{C}^G$ превращает \mathbb{C}^G в эрмитово пространство.

Доказательство. Ясно, что (\cdot, \cdot) – полуторалинейная функция и $(f, h) = \overline{(h, f)}$. Надо проверить лишь положительную определенность.

$$(f, f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{f(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |f(g)|^2 > 0, \text{ если } f \neq 0.$$

Замечание.

Если применять две введенные формы к характерам, то они совпадают, то есть $(\chi_\rho, \chi_\zeta) = \langle \chi_\rho, \chi_\zeta \rangle$.

В самом деле

$$\begin{aligned} \langle \chi_\rho, \chi_\zeta \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \chi_\zeta(g^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_\zeta(g)} = (\chi_\rho, \chi_\zeta). \end{aligned}$$

Теорема (свойство ортогональности характеров). Пусть ρ и ζ – неприводимые комплексные представления группы G . Тогда

$$(\chi_\rho, \chi_\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho \cong \zeta; \\ 0, & \text{если } \rho \not\cong \zeta. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем

$$(\chi_\rho, \chi_\zeta) = \langle \chi_\rho, \chi_\zeta \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\dim V} \rho_{ii}, \sum_{j=1}^{\dim W} \zeta_{jj} \right\rangle = \sum_{i,j} \langle \rho_{ii}, \zeta_{jj} \rangle.$$

Если $\rho \not\cong \zeta$, то $\langle \rho_{ii}, \zeta_{jj} \rangle = 0$ для любых i, j .

Если же $\rho \cong \zeta$, можно считать $\rho = \zeta$. Тогда

$$\langle \rho_{ii}, \rho_{jj} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ \frac{1}{\dim V}, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

В итоге $\langle \chi_\rho, \chi_\zeta \rangle = \sum_{i=1}^{\dim V} \frac{1}{\dim V} = 1$.

Следствие. Пусть $\rho = m_1\rho_1 \oplus \dots \oplus m_k\rho_k$ – разложение в прямую сумму неприводимых. Тогда $m_i = (\chi_\rho, \chi_{\rho_i})$.