Существование жорданова базиса для нильпотентного оператора

Обозн. $\psi = (\varphi - \lambda_i \mathcal{E})|_{K(\lambda_i)}$, B – его матрица; считаем, что $K(\lambda_i) = V$, B имеет на V единств. собств. значение $\lambda = 0$, если $\dim V = n$, то $B^n = 0$ ($\chi_B = (-\lambda)^n$).

Обозн. $d = \min m : B^m = 0 \Rightarrow B^d = 0 \neq B^{d-1}$.

Собств. подпр-во для B – это $\operatorname{Ker} B$, $\dim \operatorname{Ker} B = r$.

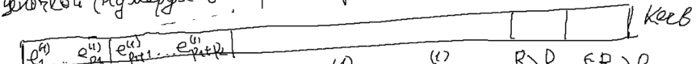
Имеем строго убывающую цепочку подпр-в:

$\operatorname{Im} B \supset \operatorname{Im} B^2 \supset \ldots \supset \operatorname{Im} B^{d-1} \supset \operatorname{Im} B^d = \{0\}$ (A)

(нестрогие включения очевидны; если $\exists k : \operatorname{Im} B^{k-1} = \operatorname{Im} B^k$ $\Rightarrow \operatorname{rk} B^{k-1} = \operatorname{rk} B^k$; в базисе, согласованном с цепочкой, матрица B будет треугольной $B = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} B^k$ убывают)

Расм. подпр-ва $R_i = \operatorname{Im} B^i \cap \operatorname{Ker} B$; если $B^0 = \mathcal{E}$ (по догов.), то $R_0 = \operatorname{Ker} B$. Имеем $0 = R_d \subseteq R_{d-1} \subseteq \ldots \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq R_0 = \operatorname{Ker} B$

Надо выбрать базис в $\operatorname{Ker} B$, согласованный с последней цепочкой (нумеруя векторы в обратном порядке)



базис R_{d-1} $\in R_{d-1}$ и т.д. $e^{(1)}_{p_1+p_2+1}, \ldots, e^{(1)}_{p_1+p_2+p_3}$ $\quad R_1 \setminus R_2 \quad \in R_0 \setminus R_1$

$(\operatorname{Im} B^{d-1})$ $\qquad \in R_{d-3} \setminus R_{d-2}$

базис R_{d-2}

Векторы $e_1^{(1)}, \ldots, e_{p_1}^{(1)}$ имеют по $d-1$ присоединенных, их можно найти решая системы уравнений:

для $e_1^{(1)}$, $e_1^{(2)}$ – реш. системы $Be_1^{(2)} = e_1^{(1)}$, $e_1^{(3)}$ – реш. $Be_1^{(3)} = e_1^{(2)}$ и т.д.

$e_1^{(d)}$ – реш. системы $Be_1^{(d)} = e_1^{(d-1)}$.

Т.о. векторы из первой порции порождают цепочки высоты d (макс. высота), из второй (если они есть) – цепочки высоты $d-1$, и т.д., векторы из последней порции – цепочки высоты 1.

Лемма. Объединение всех векторов всех построенных цепочек – линейно независимая система.

Общее кол-во векторов равно $\dim V = n \Rightarrow$ они образуют жорданов базис V.

Лемма. Пусть есть r цепочек высот $h_1, \ldots, h_r$,

$\{v_1, Bv_1, \ldots, B^{h_1-1}v_1\}$, $B^{h_1}v_1 = 0$ причем последние векторы

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\{v_r, Bv_r, \ldots, B^{h_r-1}v_r\}$, $B^{h_r}v_r = 0$ этих цепочек линейно независимы. Тогда все векторы всех цепочек линейно независимы.

Занумеруем векторы цепочек $v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(h_1)}; \ldots v_r^{(1)}, \ldots, v_r^{(h_r)}$

Допустим, что $\alpha_1^{(1)} v_1^{(1)} + \ldots + \alpha_1^{(h_1)} v_1^{(h_1)} + \ldots + \alpha_r^{(1)} v_r^{(1)} + \ldots + \alpha_r^{(h_r)} v_r^{(h_r)} = 0$ (собств.)

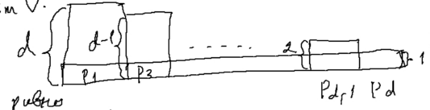
Индукция по числу векторов (по общей длине цепочек)

Подействуем на эту комбинацию оператором B:

$\alpha_1^{(1)} v_1^{(2)} + \ldots + \alpha_1^{(h_1-1)} v_1^{(h_1)} + \ldots + \alpha_r^{(1)} v_r^{(2)} + \ldots = 0$ (сюда не входят собств. векторы) $\Rightarrow$ по предп. индукции,

$\alpha_1^{(1)} = \ldots = \alpha_r^{(h_r-1)} = 0$. В исходной комбинации остаются только $\alpha_1^{(h_1)} v_1^{(h_1)} + \ldots + \alpha_r^{(h_r)} v_r^{(h_r)} = 0$. (собств. векторы). По усл. они лин. нез. $\Rightarrow$ остальные коэфф. равны 0. ч.т.д.

Их кол-во равно $\dim V$.



Общее число векторов равно

$p_1 d + p_2(d-1) + \ldots + 2p_{d-1} + p_d =$

$= (p_1 + p_2 + \ldots + p_d) + (p_1 + \ldots + p_{d-1}) + \ldots + (p_1 + p_2) + p_1 =$

$= \dim R_0 + \dim R_1 + \ldots + \dim R_{d-2} + \dim R_{d-1} =$

$= \sum_{i=0}^{d-1} \dim(\operatorname{Im} B^i \cap \operatorname{Ker} B) = \sum_{i=0}^{d-1} (\dim \operatorname{Ker} B^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} B^i) =$

$= \dim \operatorname{Ker} B^d = \dim V$.

Почему $\dim(\operatorname{Im} B^i \cap \operatorname{Ker} B) = \dim B^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} B^i$?

$\operatorname{Im}(B^i \cap \operatorname{Ker} B) = \operatorname{Ker}(B|_{\operatorname{Im} B^i}) \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} B|_{\operatorname{Im} B^i} =$ $(B : \operatorname{Im} B^i \to \operatorname{Im} B^{i+1})$

$= \dim \operatorname{Im} B^i - \dim \operatorname{Im} B^{i+1} =$

$= n - \dim \operatorname{Ker} B^i - (n - \dim \operatorname{Ker} B^{i+1}) = \dim \operatorname{Ker} B^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} B^i$.

$U = \langle c_1, \ldots, c_m \rangle$, $\dim U = m$, $\dim V = n$, $m < n$. (можно сч., что $V = F^n$)

лин. независимы.

Нам нужно построить матрицу A, что мн-во решений о.с.л.у. $AX = 0$ совпадало с U.

Для этого н.и.д., чтобы $\begin{cases} Ac_1 = 0 \\ \ldots \\ Ac_m = 0 \end{cases}$ и $\operatorname{rk} A = n - m$

Мы можем расм. $(c_1 \ldots c_m)$ как фундаментальную матрицу для искомой матрицы A.

Запишем их как строки и э.п. строк приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду:

$\begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_m \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{строк}]{\text{э.п.}} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}_{E_m} \middle| \underbrace{B}_{(m \times (n-m))} \right)$. По столбцам – надо трансп. $\Rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} E_m \\ \hline B^T \end{pmatrix}$. Тогда $\operatorname{rk} \Phi = m$.

блочный столбец

Возьмем

$A := \left(-B^T \middle| E_{n-m} \right)$; $A \cdot \Phi = -B^T \cdot E_m + E_{n-m} \cdot B^T =$

блочная строка $\qquad = -B^T + B^T = 0$

$\operatorname{rk} A = n - m$ $\Rightarrow A$ – искомая.

Т. Если $V = U \oplus W$, то $V/U \cong W$

$V/U = \{v + U\} = \{v + u \mid u \in U\}$ $\quad \bar{v} = v + U$

как один элемент

$\forall\, v = u + w$.

Расм. отображение $\varphi : V/U \to W$

$\varphi(v + U) = w$, где $v = u + w$.

Это инъекция. Пусть $\varphi(\bar{v}_1) = \varphi(\bar{v}_2)$, $v_1 = u_1 + w_1$, $v_2 = u_2 + w_2$

$\Rightarrow w_1 = w_2$

$\Rightarrow \bar{w}_1 = w_1 + U = (u_1 + w_1) + U = \bar{v}_1$; т.к. $w_1 = w_2$

$\bar{w}_2 = w_2 + U = (u_2 + w_2) + U = \bar{v}_2$ $\Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_2$.

$V/U = \langle \bar{v}_1 \rangle$

(Равносильно, д-ть, что $\operatorname{Ker} \varphi = \{\bar{0}\} = U$.

Пусть $\bar{v} \in \operatorname{Ker} \varphi$, $v = u + w$, $\varphi(\bar{v}) = w = 0 \Rightarrow v = u \in U$ $\Rightarrow \bar{v} = u + U = U = \bar{0}$)

$\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$, если $f \not\equiv 0$. Возьмем $v_1 \in V$, $f(v_1) \neq 0$. Для $\forall v \in V$ найдем $\lambda \in F : f(v - \lambda v_1) = 0 : f(v) - \lambda f(v_1) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{f(v)}{f(v_1)}$ $\Rightarrow v - \lambda v_1 \in \operatorname{Ker} f = U \Rightarrow v = \lambda v_1 + u, u \in U$.