§5. Диагонализируемость линейных операторов

Пусть $\varphi: V \to V$ – лин. оператор, $\dim V = n$.

<u>Опр.1.</u> Скажем, что матрица оператора φ диагонализируема, если $\exists$ базис e в V, в котором A_φ диагональна.

<u>Термины</u> Для характеристического корня $\lambda \in F$: геометрическая кратность λ, $\text{гкр}(\lambda) = \dim V_\lambda$, алгебраическая кратность λ – это ~~его~~ кратность как корня характеристического многочлена ($\text{алкр}(\lambda)$)

<u>Лемма</u>. $\dim V_\lambda \leq \text{алкр}(\lambda)$

<u>Д-во</u>. Пусть $\dim V_\lambda = m$, $\text{алгр}(\lambda) = k$, нужно д-ть, что $m \leq k$.

Выберем базис в V_λ: $e_1, \ldots, e_m$ и дополним его до базиса в V, векторами $e_{m+1}, \ldots, e_n$. В ~~этом~~ базисе

$$A_{\varphi,e} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & B \\ 0 & \lambda & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & \lambda & \\ 0 & & & 0 & C \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & & & 0 & \end{pmatrix}}_{m \qquad n-m} \begin{matrix} \}m \\ \\ \}n-m \end{matrix} \Rightarrow |A_\varphi - tE| = \begin{vmatrix} \lambda - t & & 0 & B \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda - t & \\ & 0 & & C - tE \end{vmatrix} =$$

(λ – конкр. число, t – независ. перем.)

$= (\lambda - t)^m \cdot |C - tE| = 0$; λ может быть корнем $|C - tE|$

$\Rightarrow \text{акр}(\lambda) \geq m$. ч.т.д.

<u>Теорема (критерий диагонализируемости)</u>. След. условия равнс.:

1. $\exists$ базис в V, в котором A_φ диагональна.
2. В V $\exists$ собственный базис для φ.
3. Все характеристические корни $\lambda_j \in F$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – все различные), $\forall j = 1, \ldots, s$: $\dim V_{\lambda_j} = \text{акр}(\lambda_j)$
4. $V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s} = V$

<u>Замечание</u>. $\dim V_{\lambda_j} = n - \text{rk}(A_\varphi - \lambda_j E)$.

Лекция 8. (8.03.24)

§4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.

(Т.1v2) 3) Пусть $\varphi: V \to V$ - лин. оператор, $U \supseteq \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow \varphi(U) \subseteq U$.

Д. $\forall u \in U$, $\varphi(u) \in \mathrm{Im}\varphi \subseteq U \Rightarrow \varphi(u) \in U$, $\forall u \in U$, ч.т.д.

Т.2. Если $U_1, \dots, U_k$ - φ-инвариантные подпр-ва, то

а) $\forall v = u_1 + \dots + u_k \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k) \in U_1 + \dots + U_k$, ч.т.д.

б) $\forall w \in U_i$, $\forall i = 1, \dots, k \Rightarrow \varphi(w) \in U_i$, $\forall i = 1, \dots, k \Rightarrow \varphi(w) \in \bigcap_{i=1}^{k} U_i$, ч.т.д.

Пусть $\varphi: V \to V$ - линейный оператор

Основное опр. 1. Вектор $x \in V$ называется собственным вектором оператора φ, если $\boxed{x \neq 0}$ и $\exists \lambda \in F$:

$$\boxed{\varphi(x) = \lambda x} \quad (1)$$

Это λ называется собственным значением оператора φ

(x - собств. вектор с собственным значением λ)

Для данного собственного значения $\lambda \in F$ обозн.

$$V_\lambda = \{x \in V \mid \varphi(x) = \lambda x\} \quad (2)$$ (мн-во собств. векторов с добавленным 0)

V_λ - подпространство в V.

Опр. 2. V_λ называется собственным подпространством оператора φ, отвечающим собственному значению λ.

Утв. 1. $V_\lambda = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathcal{E})$ ($\mathcal{E}$ - тождественный оператор).

2. V_λ - φ - инвариантное подпр-во.

Д-во. 1. $v \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathcal{E}) \Leftrightarrow \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow v \in V_\lambda$.

2. Возьмём $x \in V_\lambda \Rightarrow \varphi(x) = \lambda x \in V_\lambda$, ч.т.д.

Замечание: если $\varphi(x) = \lambda x$ $(x \neq 0)$, $\varphi^2(x) = \lambda^2 x, \dots, \varphi^m(x) = \lambda^m x$

$\Rightarrow$ для любого многочлена $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ $(a_i \in F)$,

$p(\varphi)(x) = p(\lambda)x$. В частности, если $p(t)$ - аннулирующий многочлен для φ, т.е. $p(\varphi) = 0$, то $p(\lambda) = 0$.

Примеры. 1. $\varphi = \frac{d}{dx}$. $V = C^\infty(\mathbb{R})$, $\forall f(x) \to f'(x)$

Возьмём $f(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$, т.е. $e^{\lambda x}$ - собственная ф-я для φ

Для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\exists!$ ф-я $f(x)$: $f'(x) = \lambda f(x)$

Пусть $f(x)$ - та ф-я, рассм. $g(x) = f(x)e^{-\lambda x}$

$g'(x) = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x) e^{-\lambda x} = \lambda f(x) e^{-\lambda x} - \lambda f(x) e^{-\lambda x} \equiv 0$ на $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow g(x) \equiv C \Rightarrow f(x) = Ce^{\lambda x}$ $(\forall C \neq 0)$

$\Rightarrow \dim V_\lambda = 1$

Теорема 1. Пусть $x_1, \dots, x_m \in V$ - собственные для φ с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Тогда $x_1, \dots, x_m$ линейно независимы.

Д-во. Индукция по m.

$m = 1$ - по определению.

Пусть $m > 1$ и векторы в количестве $(m-1)$ линейно независимы

и $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m x_m = 0$. (I). Подействуем на рав-во I оператором φ:

$\dots + \alpha_m \varphi(x_m) = 0 \Leftarrow$

$\alpha_1 \varphi(x_1) + \dots + \alpha_m \lambda_m x_m = 0$ (II)

$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} x_{m-1}$

Вычтем из (II) рав. (I), умноженное на λ_m:

$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)x_1 + \dots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x_{m-1} = 0$. По предп. инд.,

$\alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}_{\neq 0} = 0$, $\forall i = 1, \dots, m-1 \Rightarrow \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_m = 0$, ч.т.д.

Следствие 1. Допустим, что $\dim V = n$ и φ имеет n различных собств. значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, тогда отвечающие им собственные векторы оператора φ образуют базис в V.

[собственный базис]

Обратим внимание, что в этом базисе $e_1, \dots, e_n$ матрица A_φ - диагональная: $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, причём $\varphi(e_j) = \lambda_j e_j$.

Т.к. $\varphi(e_j) = \lambda_j e_j$, то в координатах это значит, что

$$A_\varphi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Следствие 2. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ - попарно различные собственные значения оператора φ, тогда сумма $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m}$ $\overline{\overline{\text{прямая сумма}}}$ $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$

(док-во - упр.)

Вычисление собственных значений и собственных векторов с помощью A_φ.

Пусть $\dim V = n$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ - некот. базис в V,

$A_{\varphi;e}$ - матрица оператора φ. В координатах:

По опр: $\varphi(x) = \lambda x$, $x \neq 0$.

$$A_\varphi X = \lambda X \Leftrightarrow (A_\varphi - \lambda E)X = 0 \quad (3),\ X \neq 0.$$

Для того, чтобы система (3) имела хотя бы одно ненулевое решение, необходимо, чтобы

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = 0 \quad (4)$$

λ - корень характеристического уравнения (4)

(собственными значениями будут только корни $\lambda \in F$)

Раскроем $\det(A_\varphi - \lambda E) =$ (многочлен степени n)

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + \underset{\text{степени} \leq n-2 \text{ по } \lambda}{\text{слагаемые}} \dots + = (-\lambda)^n + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)(-\lambda)^{n-1} + \dots + |A|$$

Термин: $\det(A_\varphi - \lambda E)$ - характеристический многочлен матрицы A_φ.

Лемма. Характеристический многочлен матрицы A_φ не зависит от выбора базиса.

Д-во. Пусть $e' = e \cdot C$ - новый базис, тогда

$A_{\varphi;e'} = C^{-1} A_{\varphi;e} C \Rightarrow |A_{\varphi;e'} - \lambda E| = |C^{-1} A_\varphi C - \lambda (C^{-1}C)| =$

$= |C^{-1}(A_\varphi - \lambda E)C| = |C^{-1}| |A_\varphi - \lambda E| \cdot |C| = |A_\varphi - \lambda E|$ ч.т.д.

Опр. $\chi_\varphi(\lambda) = |A_\varphi - \lambda E|$ (в любом базисе) - характеристический многочлен оператора φ.