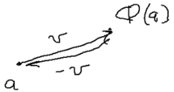
Теорема. Любое обратимое аффинное преобразование $\Phi : A \to A$ единственным образом представляется в виде:

$$\Phi = t_v \circ \Psi,$$

где a – фикс. точка из A, $\Psi(a) = a$.



Д-во. Обозн. $v = \overrightarrow{a\Phi(a)}$.

Рассм. преобразование $\Psi = t_v^{-1} \circ \Phi = t_{-v} \cdot \Phi$.

$\Psi(a) = t_{-v}(\Phi(a)) = \Phi(a) - v = a + v - v = a$.

$\Rightarrow \Phi = t_v \cdot \Psi$.

Единственность: если $\Phi = \underbrace{t_v \cdot \Psi = t_{v'} \cdot \Psi'}$, $\psi(a) = \psi'(a)$

$\Rightarrow t_{v-v'} = \psi' \cdot \psi^{-1} \Rightarrow t_{v-v'}(a) = a \Rightarrow v - v' = 0$, $v = v'$

$\Rightarrow t_v = t_{v'} \Rightarrow \Psi' = \Psi$, ч.т.д.

Взаимное расположение двух плоскостей

$\pi_1 = p_1 + U_1$, $\pi_2 = p_2 + U_2$, U_1, U_2 – подпр-ва в V.

$\pi_1 \parallel \pi_2$, если $U_1 \subseteq U_2$ или $U_2 \subseteq U_1$

(не исключено, что $\pi_1 \subseteq \pi_2$ или $\pi_2 \subseteq \pi_1$)

Утв. 1. $\pi_1 \cap \pi_2$ либо пусто, либо является плоскостью:

$\pi_1 \cap \pi_2 = p_0 + U_1 \cap U_2$.

$p_0 \in \pi_1 \cap \pi_2$

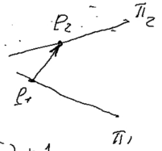
Опр. Аффинная оболочка подмножества $M < A$ – это

$\langle M \rangle = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0 p} \mid p \in M \rangle$

Т.о. $\langle M \rangle$ – аффинная плоскость с направляющим подпр-вом $U = \langle \overrightarrow{p_0 p} \mid p \in M \rangle$

Если $p \in M$, то точки вида $p_0 + \overrightarrow{p_0 p}$ принадлежат любой плоскости, содержащей $M \Rightarrow p_0 + U$ – наименьшая пл-ть, содержащая M.

Поэтому $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_1 + \langle \overrightarrow{p_1 p} \mid p \in \pi_1 \cup \pi_2 \rangle$.



Теор. $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_1 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle$, и при этом

(1) $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1 p_2} \in U_1 + U_2$, и при этом

$\dim \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \dim (U_1 + U_2)$

(2) $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, то $\dim \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \dim (U_1 + U_2) + 1$

Д-во. Обозн. $\pi = p_1 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle$

Ясно, что $\pi_1 \subseteq \pi$, $\pi_2 \subseteq \pi \Rightarrow \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \subseteq \pi$.
(как наим. пл-ть)

Обратное включение. $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_1 + W$, $W \subseteq V$.

т.к. $p_2 \in \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \Rightarrow \overrightarrow{p_1 p_2} \in W$. Также ясно, что $\forall u_1 \in U_1$, $p_1 + u_1 \in \pi_1 \subseteq \pi$ и $\forall u_2 \in U_2$, $p_2 + u_2 = p_1 + (\overrightarrow{p_1 p_2}) + u_2 \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{p_1 p_2} + u_2 \in W \Rightarrow u_2 \in W$

Т.о., $\langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle \subseteq W \Rightarrow \pi \leq \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ – доказали равенство.

(1) Если $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$, то $\overrightarrow{p_1 p_2} \in U_1 + U_2$: $\exists p \in \pi_1 \cap \pi_2$

$\Rightarrow p = p_1 + u_1 = p_2 + u_2 \Rightarrow p_2 - p_1 = \overrightarrow{p_1 p_2} = u_1 - u_2 \in U_1 + U_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle = U_1 + U_2$

(2) Если $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, то $\overrightarrow{p_1 p_2} \notin U_1 + U_2 \Rightarrow \dim \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle = \dim (U_1 + U_2) + 1$, ч.т.д.

Утв. Для двух плоскостей $\pi_1, \pi_2 \subset A$ возможно одно из трёх: 1) $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$ (в частности, возможно $\pi_1 \subseteq \pi_2$ или $\pi_2 \subseteq \pi_1$)

2) $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ и $\pi_1 \parallel \pi_2$,

3) не 1) и не 2): $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ и $\pi_1 \nparallel \pi_2$

– скрещиваются.

§3. Аффинные отображения

Пусть A_1, A_2 – аффинные пр-ва над векторными пространствами V_1, V_2 (поле F одно и то же)

Опр. Отображение $\Phi: A_1 \to A_2$ называется аффинным (или аффинно-линейным), если $\exists$ линейное отображение $\varphi: V_1 \to V_2$ такое, что

$\forall a, b \in A_1$: $\overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)} = \varphi(\overrightarrow{ab})$ (1)

Эквивалентно: $\Phi(b) = \Phi(a) + \varphi(\overrightarrow{ab})$ (1')

Замечание. Если фиксировать точку a, а точку $b \in A_1$ менять, то вектор $\overrightarrow{ab}$ может быть любым вектором из $V_1 \Rightarrow$ для отображения Φ его линейная часть определена однозначно: $\forall v \in V_1$ $\exists! b \in A_1$: $\overrightarrow{ab} = v \Rightarrow$

$\varphi(v) = \overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)}$ – опр. однозначно.

Теор. 1. Пусть $A_1 \xrightarrow{\Phi_1} A_2 \xrightarrow{\Phi_2} A_3$, Φ_1, Φ_2 – аффинные отображения, тогда $\Phi_2 \circ \Phi_1$ – аффинное отобр. с линейной частью $\varphi_2 \cdot \varphi_1$.

2. $\Phi: A_1 \to A_2$ биективно (невырожденно) $\Leftrightarrow$ его лин. часть φ биективна, причём Φ^{-1} имеет лин часть φ^{-1}

Координатная запись. $\Phi: A_1 \to A_2$ – аффинное отображение

$\{p_1; e\}$ – с.к. в A_1, $\dim A_1 = n$,

$\{p_2; f\}$ – с.к. в A_2, $\dim A_2 = m$,

X – столбец коорд. $\forall$ точки $p \in A_1$, X_0 – столбец коорд. точки $\Phi(p_1)$ в с.к. $\{p_2; f\}$, $A = A_\varphi$ – матрица отобр. φ в базисах e, f,

Y – ст. координат точки $\Phi(p)$.

Тогда $\Phi(p) = \Phi(p_1) + \varphi(\overrightarrow{p_1 p}) = p_2 + \overrightarrow{p_2 \Phi(p_1)} + \varphi(\overrightarrow{p_1 p}) \Rightarrow$

$Y = X_0 + A \cdot X$ (2)

В подробной записи:

$y_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ (2), $i = 1, \ldots, m$

$\Rightarrow dy_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} dx_j$

Обозн. $\mathcal{D}Y = \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = A \cdot dX = A \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$

Мы видим, что (в координатах) $\varphi = \mathcal{D}\Phi$,

$\mathcal{D}\Phi: V_1 \to V_2$

Замечание. Можно ввести $\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix}$, блочную матрицу $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда

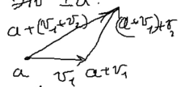
(2) $\Leftrightarrow \tilde{Y} = \tilde{A} \cdot \tilde{X}$ (3)

§4. Аффинные преобразования

Опр. Аффинное преобразование $\Phi: A \to A$ – это афф. отображение A в A.

Тогда 2-я система координат совп. с первой.

Примеры. 1. Параллельный перенос на вектор $v \in V$, $t_v(a) = a + v$, $\forall a \in A$. Ясно, что лин часть – это Id.



Очев., $\forall v_1, v_2$, $t_{v_1} \circ t_{v_2} = t_{v_2} \cdot t_{v_1} = t_{v_1 + v_2}$

2. Гомотетия с центром в точке $O \in A$ и коэфф. $\lambda \neq 0$:

$\forall v \in V$, $\Phi(O + v) = O + \lambda v \Rightarrow \mathcal{D}\Phi = \lambda \, \mathrm{Id}$.

$\lambda = -1$ – это центральная симметрия.