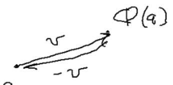
<u>Теорема 1</u>. Любое обратимое аффинное преобразование $\Phi: A \to A$ единственным образом представляется в виде:

$$\Phi = t_v \circ \Psi,$$

где a - фикс. точка из A, $\Psi(a) = a$.



<u>Д-во</u>. Обозн. $v = \overrightarrow{a\Phi(a)}$.

Рассм. преобразование $\Psi = t_v^{-1} \circ \Phi = t_{-v} \circ \Phi$.

$\Psi(a) = t_{-v}(\Phi(a)) = \Phi(a) - v = a + v - v = a$.

$\Rightarrow \Phi = t_v \circ \Psi$.

Единственность: если $\Phi = \underbrace{t_v \Psi = t_{v'} \cdot \Psi'}$, $\psi(a) = \psi'(a)$

$\Rightarrow t_{v-v'} = \Psi' \cdot \Psi^{-1} \Rightarrow t_{v-v'}(a) = a \Rightarrow v - v' = 0$, $v = v'$

$\Rightarrow t_v = t_{v'} \Rightarrow \Psi' = \Psi$, ч.т.д.

27.04

Т.2. Для любых наборов точек $\{a_0, a_1, .., a_n\}$, $\{b_0, b_1, .., b_n\}$ в n-мерном аффинном пространстве A таких, что $a_0, a_1, .., a_n$ аффинно независимы, $\exists!$ аффинное преобразование $\Phi: A \to A$, такое, что $\Phi(a_i) = b_i$, если $i = 0, .., n$.

Если также $b_0, .., b_n$ аффинно независимы, то Φ биективно (невырожденно).

<u>Д-во</u>. По усл., $\{\overrightarrow{a_0a_1}, .., \overrightarrow{a_0a_n}\}$ - базис в пр-ве V, то $\exists!$ лин. оператор $\varphi: V \to V$, т.что $\varphi(\overrightarrow{a_0a_i}) = \overrightarrow{b_0b_i}$, тогда искомое $\Phi(a_0 + v) = b_0 + \varphi(v)$.
$\forall v \in V$

Если также векторы $\{\overrightarrow{b_0b_1}, .., \overrightarrow{b_0b_n}\}$ - базис, то φ невырожденный оператор $\Rightarrow \Phi$ биективно, ч.т.д.

Док-во теоремы: 1) $A_1 \xrightarrow[\Phi_1]{} A_2 \xrightarrow[\Phi_2]{} A_3$, Φ_1, Φ_2 - аффинные с лин. частями φ_1, φ_2, то $\Phi_2 \circ \Phi_1$ - аффинное с лин. частью $\varphi_2 \circ \varphi_1$.

<u>Д-во</u>. $\forall a_1 \in A_1$, $\forall v_1 \in V_1$, $\Phi_1(a_1 + v_1) = \Phi_1(a_1) + \varphi_1(\vec{v}_1)$,

$\Phi_2(\Phi_1(a_1 + v_1)) = \Phi_2(\Phi_1(a_1) + \varphi_1(v_1)) = \Phi_2(\Phi_1(a_1)) + \varphi_2(\varphi_1(v_1)) =$

$= (\Phi_2 \circ \Phi_1)(a_1) + (\varphi_2 \circ \varphi_1) v_1 \Rightarrow \Phi_2 \circ \Phi_1$ - аффинное отобр., его лин. часть - это $\varphi_2 \circ \varphi_1$.

2) $A_1 \xrightarrow[\Phi]{} A_2 \xrightarrow[(\Phi^{-1})]{} A_1$

Φ^{-1} - тоже аффинное?

Отображение Φ биективно $\Leftrightarrow$ оно обратимо. Обозн.

$\Phi': A_2 \to A_1$,

$\Phi' \circ \Phi = Id_{A_1}$. $\Phi(a_1 + v) = \Phi(a_1) + \varphi(v)$,

$\Phi'(\Phi(a_1 + v)) = \Phi'(\Phi(a_1)) + (\varphi'\varphi)(v) = a_1 + v \Leftrightarrow \varphi'\varphi = Id = \mathcal{E}$.

$\Phi' \circ \Phi = Id$, если т.е. $\varphi' =$ левый обр. к φ.

и $\Phi'(\Phi(a_1)) = a_1$; при условии, что φ обратимо, Φ' будет обратным к Φ, если $\Phi'(\Phi(a_1)) = a_1$, $\varphi' = \varphi^{-1}$.
$\in A_2$

(нужно было бы рассм. также $\Phi \circ \Phi'$). ч.т.д.

§5. Аффинные евклидовы пространства

<u>Опр</u>. Афф. пр-во (A, V) назыв. евклидовым [точечным] пространством, если V - евклидово векторное пр-во.

Расстояние между точками $\rho(x, y) := |\overrightarrow{xy}| = \sqrt{(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xy})}$
$x, y \in A$

<u>Упр</u>. Так введенное расстояние удовл. всем условиям из определения метрики:

1) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \geq 0$, 2) $\rho(x, x) = 0$, 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Можно рассм. систему координат $(o; e)$, где e - о.н. базис в V - она назыв. прямоугольной (ортонормированной)

$\Rightarrow \rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$

<u>Опр.2</u>. Аффинные евклидовы пр-ва (A_1, V_1), (A_2, V_2) назыв. изоморфными, если $\exists$ биективное аффинное отображение $\Phi: A_1 \to A_2$, такое, что $\forall a, b \in A_1$, $\rho_2(\Phi(a), \Phi(b)) = \rho_1(a, b)$. Такое Φ назыв. изоморфизмом.

<u>Теорема 1</u>. Если $\dim A_1 = \dim A_2 (= n)$, то они изоморфны.

<u>Д-во</u>. Фиксируем в A_1 и A_2 прямоугольные системы координат: $\{o; e\}$, $\{o'; e'\}$

Определим лин. отображение $\varphi: V_1 \to V_2$ по правилу:

$\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) := \sum_{i=1}^{n} x_i e'_i$ - оно линейно и биективно, то изо

опр. $\Phi: A_1 \to A_2$: $\Phi(o + v) = o' + \varphi(v)$, тогда $o' = \Phi(o)$,

для любой точки $a \in A_1$, точка $a' = \Phi(a)$ будет иметь по постр. те же координаты, что и точка a (в системе координат своего пространства).

$\Rightarrow \rho_1(a, b) = \sqrt{\sum_i (b_i - a_i)^2} = \rho_2(a', b')$, ч.т.д

<u>Упр</u>. Д-ть, что верно и обратное.

Расстояние и угол между аффинными плоскостями

Пусть $\Pi_1 = p_1 + U_1$, $\Pi_2 = p_2 + U_2$.

Опр.: $\rho(\Pi_1, \Pi_2) = \inf\{\rho(x, y) \mid x \in \Pi_1, y \in \Pi_2\}$

Угол: $\alpha(\Pi_1, \Pi_2) = \inf\{\alpha(u_1; u_2) \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$

В частности, $\Pi_1 \perp \Pi_2$, если этот угол равен $90°$.

U_1, U_2 - подпр-ва в V,

<u>Теор.2</u>. Если $\Pi_1 = p_1 + U_1$, $\Pi_2 = p_2 + U_2$, то $\rho(\Pi_1, \Pi_2)$ равно длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{p_1p_2}$ относительно $U_1 + U_2$.

(<u>Замеч</u>. Если $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \varnothing$, то $\overrightarrow{p_1p_2} \in U_1 + U_2 \Rightarrow \overrightarrow{p_1p_2}_\perp = 0$, и $\rho(\Pi_1, \Pi_2) = 0$)

<u>Д-во</u>. Обозн. $W = U_1 + U_2$, тогда $V = W \oplus W^\perp$, соотв. $\forall v \in V$, $v = v_\parallel + v_\perp$, $v_\parallel \in W$ - проекция, $v_\perp \in W^\perp$ - ортогон. составляющая

В качестве v возьмём $v = \overrightarrow{p_1p_2}$, $\rho(\Pi_1, \Pi_2) \stackrel{?}{=} |v_\perp|$

Выберем $\forall$ точки $x = p_1 + u_1 \in \Pi_1$, $y = p_2 + u_2 \in \Pi_2$,

$\rho^2(x, y) = |\underbrace{x - y}_{y - x}|^2 = |\underbrace{\overrightarrow{p_1p_2}}_{v} + u_2 - u_1|^2 = |\underbrace{(v_\parallel + u_2 - u_1)}_{\in W} + \underbrace{v_\perp}_{\in W^\perp}|^2 \stackrel{т. Пиф.}{=} |v_\parallel + u_2 - u_1|^2 + |v_\perp|^2 \geq |v_\perp|^2$,

причем равенство достигается, если $v_\parallel = u_1 - u_2$: т.к. $v_\parallel \in U_1 + U_2$, то такие $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$ найдутся, ч.т.д.

<u>Следствие</u>. Прямая $l = a + \langle \overrightarrow{ab} \rangle = (p_1 + u_1) + \langle (\overrightarrow{p_1p_2})_\perp \rangle$, проходящая через точки $a = p_1 + u_1$ и $b = p_2 + u_2$ является общим $\perp$ этих плоскостей.

Ортогональные преобразования.

<u>Опр.</u> Пусть (A, V) — евклидово пр-во.
Аффинное преобразование $\Phi: A \to A$ называется ортогональным (или движением), если его линейная часть $\varphi = D\Phi$ — ортогональный оператор в V, т.е. $\forall a, b \in A$, $\rho(\Phi(a), \Phi(b)) = \rho(a, b)$,
т.е. $|\overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)}| = |\overrightarrow{ab}| \Leftrightarrow \varphi$ сохр. длины.
Из опр следует, что Φ биективно.
<u>Задача.</u> В определении требование аффинности можно отбросить. (третий термин: изометрия)
В прямоугольной с.к. $\{0, e\}$ пусть $X_0 = \Phi(0)$, X — столбец координат произвольной точки, Y — столбец координат её образа, тогда

$$Y = AX + X_0, \text{ причём матрица } A \text{ — ортогональная.}$$

У ортогональной матрицы $\det A = \pm 1$;
если $\det A = 1$, то Φ — собственное преобразование,
если $\det A = -1$, то Φ — несобственное.

Теорема о разложении невырожденного аффинного преобр. для евклидова случая:

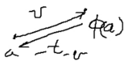
$$\Phi = t_v \circ \Psi \quad (\Psi \text{ с неподв. точкой})$$

<u>Теорема 3.</u> Для любого движения $\Phi: A \to A$ с линейной частью φ найдется такой вектор $u \in V$: $\varphi(u) = u$,

$$\Phi = t_u \circ \Psi, \text{ где } \Psi \text{ имеет неподвижную точку.}$$

(замечание: не исключено, что $u = 0$)

<u>Док-во.</u> Пусть $a \in A$ — произвольная точка,
обозн. $v = \overrightarrow{a\Phi(a)}$
Обозн. $U = \{u \in V \mid \varphi(u) = u\}$.



Если $\exists \lambda = 1$, то $U \neq \{0\}$ — собственное подпр-во,
иначе $U = \{0\}$.
Обозн. $W = U^{\perp}$ (при $U \neq \{0\}$) $\Rightarrow v = u + w$ для подходящих $u \in U$, $w \in W = U^{\perp}$.
Рассм. преобразование $\Psi = t_u^{-1} \circ \Phi = t_{-u} \circ \Phi$.
Докажем, что у Ψ есть неподвижная точка.
Будем искать её в виде $b = a + w'$, где $w' \in U^{\perp}$.

$$\Psi(a + w') = (t_{-u} \circ \Phi)(a + w') = t_{-u}(\Phi(a) + \varphi(w')) =$$
$$= t_{-u}(a + v + \varphi(w')) = a + v - u + \varphi(w') = a + w + \varphi(w') =$$
$$= a + w + w' + (\varphi(w') - w') \overset{?!}{=} a + w' \text{ — это будет так,}$$

если $(\varphi(w') - w') = -w$, или
$(\varphi - \mathcal{E})(w') = -w$. Но $(\varphi - \mathcal{E})(w') = (\varphi - \mathcal{E})|_W (w')$, на W
$\mathcal{E} = \mathrm{Id}$
оператор $\varphi - \mathcal{E}$ обратим $\Rightarrow w' = -(\varphi - \mathcal{E})^{-1}(w) \Rightarrow \Psi(b) = b$,
ч.т.д.