3.05

Комментарий к теореме: $\forall$ афф. $\Phi = t_u \cdot \Psi$ (Ψ имеет неподв точку), если Φ биективно.

Из д-ва: если $\lambda = 1$ не явл. собств. значением оператора $\varphi = D\Phi$, то само Φ имеет неподв. точку;

если $\exists \lambda = 1$, u - собств. вектор для φ: $\varphi(u) = u$, $u \neq 0$, то все точки прямой $\ell = b + \langle u \rangle$ неподвижны, т.к. $\Psi(b) = b$, $\Psi(b+tu) = \Psi(b) + t\varphi(u) = \Psi(b) + tu = b + tu$.

Эти наблюдения можно использовать, чтобы классифицировать движения при $n=2$ и 3.

§ 6. Аффинно-квадратичные функции. Квадрики

Считаем, что $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (большинство рез. верно для любого поля F, $\operatorname{char} F \neq 2$).

Опр. $Q: \mathbb{A} \to F$ назыв. аффинно-квадратичной, если для $\forall$ точки $o \in \mathbb{A}$ (фикс.) $\exists$ квадратичная ф-я $q: V \to F$ и линейная ф-я $l: V \to F$ такие, что $\forall v \in V$

$$Q(o+v) = Q(o) + q(v) + 2l(v) \quad (1) \qquad (\text{по опр., } q \neq 0)$$

$Q(a) = Q(o+v)$, $o + v = a$

В аффинной с.к. $\{o; e\}$, в которой $a(x_1, \dots, x_n)$:

$$Q(a) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}_{l(v)} + c \quad (2)$$

где B - матрица кв. формы q в базисе e, $c = Q(o)$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ - коэфф. формы l.

$Q(x_1, \dots, x_n)$ - аффинно-квадратичная форма.

Изменение коэффициентов при замене системы координат.

$\{o; e\} \to \{o'; e'\}$. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - коорд. точки a в старой с.к., X' - в новой, $\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$, вводим блочную матрицу перехода $\tilde{C} = \begin{pmatrix} C & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $C = C_{e \to e'}$, X_0 - столбец координат точки o', $0 = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n}$.

Можно ввести блочную матрицу $\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & a^\uparrow \\ a^T & c \end{pmatrix}$, $a^\uparrow = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $a^T = \vec{a}$.

Тогда $\tilde{B}' = \begin{pmatrix} B' & a' \\ a'^T & c' \end{pmatrix} = \tilde{C}^T \tilde{B} \tilde{C}$.

Из умн. блочных матриц: $B' = C^T B C$,

$a'^\uparrow = C^T(BX_0 + a^\uparrow)$, $c' = Q(x_1^0, \dots, x_n^0) = Q(o')$.

Если базис не менять, то $C = E$, $a'^\uparrow = BX_0 + a$ (3)

Из (3) видно, что если $\exists X_0$, что $BX_0 = -a^\uparrow$, то $l' = 0$, и Q приобретает вид: $Q(o'+v) = Q(o') + q(v)$ $\forall v \in V$

$\Rightarrow Q(o'-v) = Q(o') + q(-v) = Q(o') + q(v) = Q(o'+v)$

Точки $o'+v$ и $o'-v$ симм. отн. точки o'.

Опр.2. Точка o' - центр афф. кв. функции Q, если $\forall v \in V$: $Q(o'+v) = Q(o'-v)$

Система для нахождения центра: $BX = -a^\uparrow$ (3)

Обозн. $C(Q)$ - мн-во центров, то

$$C(Q) = \begin{cases} \text{единств. т. } o', \text{ если } \operatorname{rk} B = n \Leftrightarrow |B| \neq 0 \\ \text{явл. плоскостью } \dim = n - \operatorname{rk} B > 0 \\ \varnothing \end{cases}$$

Утв. Если o_1, o_2 - центры афф.-кв. функции Q, то $Q(o_1) = Q(o_2)$

Д., $Q(o_2) = Q(o_1) + q(\overrightarrow{o_1 o_2}) = Q(o_2) + q(\overrightarrow{o_2 o_1}) + q(\overrightarrow{o_1 o_2}) \Rightarrow$

$\underbrace{q(\overrightarrow{o_2 o_1})}_{v_0} = -q(\overrightarrow{o_1 o_2}) \Rightarrow q(\overrightarrow{o_1 o_2}) = 0$ $(\operatorname{char} F \neq 2) \Rightarrow Q(o_2) = Q(o_1)$ ч.т.д.

$q(v_0) + q(-v_0) = 0$, т.е. $2q(v_0) = 0 \Rightarrow q(v_0) = 0$

Т.1 Любую афф.-кв. форму $Q: \mathbb{A} \to F$ можно привести заменой координат к одному из видов:

$$Q(o+v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 + \alpha_{r+1} \ (\mathrm{I}) \text{ либо}$$

$$Q(o+v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 + 2x_{r+1} \ (\mathrm{II}), \text{ где } r = \operatorname{rk} B,$$

причём $\prod_{i=1}^{r} \alpha_i \neq 0$.

Д-во. Для формы $q(x)$ $\exists$ базис e', в котором $q(x') = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i'^2$, $r = \operatorname{rk} B$, $\alpha_i \neq 0$, $1 \le i \le r$.

Выберем другую точку o' и с.к. $\{o'; e'\}$, запишем

$Q(o'+v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i'^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a_j' x_j' + c'$. Выделим квадраты по x_i', $1 \le i \le r$: $\alpha_i \left(x_i'^2 + 2\frac{a_i' x_i'}{\alpha_i} + \left(\frac{a_i'}{\alpha_i}\right)^2\right) - \frac{a_i'^2}{\alpha_i}$, сделаем замену:

$\tilde{x}_i = x_i' + \frac{a_i'}{\alpha_i}$, $1 \le i \le r$, $\tilde{x}_i = x_i'$, $r+1 \le i \le n$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \tilde{x}_i^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} a_i' \tilde{x}_i + \tilde{c}$, $\tilde{c} = Q(o'')$

Если $a_i' = 0$, $i = r+1, \dots, n$, то o'' - это центр, Q приобретает вид (I).

Если $a_i' \neq 0$, то можно положить $\tilde{\tilde{x}}_{r+1} = \sum_{i=r+1}^{n} a_i' \tilde{x}_i + \frac{\tilde{c}}{2}$ $\Rightarrow Q$ приобр. вид (II).

Следствие. Если $F = \mathbb{C}$, то можно сделать все $\alpha_i = 1$, $1 \le i \le r$,

если $F = \mathbb{R}$, то можно получить вид

$$\sum_{i=1}^{p} \tilde{x}_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} \tilde{x}_i^2 + \left[\begin{matrix} \tilde{c} \\ 2\tilde{x}_{r+1} \end{matrix}\right.$$

Случай евклидова пр-ва.

Т.2. Для любой аффинно-кв. формы Q (над $\mathbb{R}$) $\exists$ о.н. с.к. $\{o', e'\}$, в которой

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 + c, \quad \lambda_i \neq 0 \text{ - собств. знач. матрицы } B.$$

либо

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 + 2\lambda_{r+1} x_{r+1}', \text{ где } \lambda_{r+1} > 0.$$

Такой вид единственный, с точностью до нумерации.

Д-во. Суж.: для оператора с матрицей B $\exists$ о.н.б. e' из собств. векторов, в котором $B' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ - единств. с точн. до нумер.

Как и в д-ве теор.1, после перехода к этому базису либо вид (I), либо

(II) $Q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \tilde{x}_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} a_i' \tilde{x}_i + \tilde{c}$

$$\tilde{\tilde{x}}_{r+1} = \underbrace{\sqrt{a_{r+1}'^2 + \dots + a_n'^2}}_{\mu} \left(\sum_{i=r+1}^{n} \frac{a_i'}{\mu} \tilde{x}_i + \tilde{c}/\mu\right) \to \text{вид (II)}.$$

$$\tilde{\tilde{e}}_{r+1} = 1/\mu \left(\sum_{i=r+1}^{n} e_i' a_i'\right), \quad \left|\sum_{i=r+1}^{n} e_i' a_i'\right| = \sqrt{a_{r+1}'^2 + \dots + a_n'^2} = \mu$$