Глава 5. Тензоры.

§1. Базовые понятия

Пусть V - векторное пр-во над полем F, $\dim V = n < \infty$, V^* - сопряжённое ему пр-во (пр-во линейных функций на V). Известно, что $V^{**} \cong V$ (изоморфизм не зависит от базиса)

Опр1. Пусть p, q - целые неотрицательные числа. Тензор типа (p,q) - это полилинейная ф-я

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{q} \to F$$

($f(v_1, \ldots, v_p; u_1, \ldots, u_q)$ линейна по каждому аргументу $v_i; u_j$)

$p+q$ - валентность тензора f (или ранг f), p - ковариантная валентность, q - контравариантная валентность. Если $pq \neq 0$, то f - смешанный тензор.

Обозн. $T_p^q(V) = T_p^q$ - мн-во тензоров типа (p,q)

Утв.1. T_p^q - векторное пр-во.

Д-во. Надо определить линейные операции.

Обозн. $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_p)$, $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_q)$.

Если $f_1, f_2 \in T_p^q$, положим $(f_1 + f_2)(\vec{v}, \vec{u}) := f_1(\vec{v}, \vec{u}) + f_2(\vec{v}, \vec{u})$, и $\forall \lambda \in F$, $(\lambda f_1)(\vec{v}; \vec{u}) := \lambda f_1(\vec{v}, \vec{u})$; $0(\vec{v}, \vec{u}) \equiv 0$.

С этими операциями $T_p^q(V)$ - векторное пр-во - упр. (следует из св-в операций над элементами поля)

Анонс: $\dim T_p^q(V) = n^{p+q}$.

Опр2. Произведение тензоров: пусть $f_1 \in T_p^q$, $f_2 \in T_r^s$, тогда $f_1 \otimes f_2 : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p+r} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{q+s} \to F$, т.е. $f_1 \otimes f_2 \in T_{p+r}^{q+s}$

$(f_1 \otimes f_2)(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+r}; u_1, \ldots, u_{q+s}) :=$
$= f_1(v_1, \ldots, v_p; u_1, \ldots, u_q) f_2(v_{p+1}, \ldots, v_{p+r}; u_{q+1}, \ldots, u_{q+s})$

Свойства операции $\otimes$

Утв.2. 1. $f_1 \otimes f_2$ - тензор типа $(p+r, q+s)$.

2. $(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 = f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3)$ - ассоц.

3. $(\alpha f_1 + \beta f_2) \otimes f_3 = \alpha (f_1 \otimes f_3) + \beta (f_2 \otimes f_3)$ - дистриб.

Упр. Эта операция в общем случае не коммутативна - привести пример.

Координаты тензоров

Правила суммирования Эйнштейна

Координаты вектора пишутся с верхними индексами: $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$. Номера базисных векторов - нижние индексы, номера векторов дуального базиса e^* - верхние индексы. Если один и тот же индекс в сумме встречается вверху и внизу, знак суммы не пишется, например, $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \equiv x^i e_i$, линейная форма $l(v) = \sum_i a_i e^i \equiv a_i e^i$. В матрице A_φ линейного оператора φ элементы a_j^i, i - номер строки, j - номер столбца, тогда $\varphi(v) = A_\varphi X = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j \equiv a_j^i x^j$ - столбец.

Пусть $v_1 = x_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, v_p = x_p^{i_p} e_{i_p}$ - векторы, $u^1 = y_{j_1}^1 e^{j_1}, \ldots, u^q = y_{j_q}^q e^{j_q}$ - линейные функции, f - тензор типа (p,q), тогда $f(v_1, \ldots, v_p; u^1, \ldots, u^q) =$
$= f(x_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, x_p^{i_p} e_{i_p}; y_{j_1}^1 e^{j_1}, \ldots, y_{j_q}^q e^{j_q}) =$ (в силу полилинейности)
$= f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}; e^{j_1}, \ldots, e^{j_q}) x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p} y_{j_1}^1 \ldots y_{j_q}^q$
(подразумевается суммирование по всем $(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q)$ от 1 до n)

Обозначим $T_{i_1, \ldots, i_p}^{j_1, \ldots, j_q} = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}; e^{j_1}, \ldots, e^{j_q})$ - это эл-ты $(p+q)$-мерной матрицы размера n^{p+q}.

Они окажутся координатами тензора f в порождаемом базисе пространства $T_p^q(V)$

Теорема. Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ - базис в V, $e^* = (e^1, \ldots, e^n)$ - дуальный к нему базис в V^*, тогда $\{e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q}\}$ (для всех $i_1, \ldots, j_q$ от 1 до n) - базис в $T_p^q(V)$

Доказательство. Прежде всего отметим, что

$(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q})(e_{i_1'}, \ldots, e_{i_p'}; e^{j_1'}, \ldots, e^{j_q'}) =$
$= e^{i_1}(e_{i_1'}) \cdot \ldots \cdot e^{i_p}(e_{i_p'}) \cdot e^{j_1'}(e_{j_1}) \cdot \ldots \cdot e^{j_q'}(e_{j_q}) = \delta_{i_1'}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{j_q}^{j_q'}$. Сначала $\tilde{f} = T_{i_1, \ldots, i_p}^{j_1, \ldots, j_q} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q}$.

Теперь вычислим $T_{i_1, \ldots, i_p}^{j_1, \ldots, j_q} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} (e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_q}) =$
$= T_{i_1, \ldots, i_p}^{j_1, \ldots, j_q} \delta_{i_1}^{i_1} \ldots \delta_{j_q}^{j_q} = T_{i_1, \ldots, i_p}^{j_1, \ldots, j_q} \Rightarrow$

$\tilde{f}(v_1, \ldots, v_p; u^1, \ldots, u^q) \equiv f(v_1, \ldots, v_p; u^1, \ldots, u^q)$

Отсюда следует, что $\tilde{f} = f$

В самом деле, докажем, что $\{e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q}\}$ линейно независимы. Если

$\lambda_{i_1, \ldots, i_p}^{j_1, \ldots, j_q} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} = 0$, то

$\lambda_{i_1, \ldots, i_p}^{j_1, \ldots, j_q} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} (e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}; e^{j_1}, \ldots, e^{j_q}) = \lambda_{i_1, \ldots, i_p}^{i_1, \ldots, j_q} = 0$, ч.т.д.

Следствие. $\dim T_p^q(V) = (\dim V)^{p+q}$