Изменение координат тензора типа (p,q) при замене базиса

Пусть $e' = e \cdot C$ – новый базис в V, $C = C_{e \to e'}$ – матрица перехода. В индексах можно записать

$$e'_{i'} = e_i c^i_{i'}, \quad \mathcal{D} = C^{-1}.$$

Обозначим также

Координаты вектора v_k преобразуются по формуле

(1) $x_k^{i_k} = c^{i_k}_{i'_k} x'^{i'_k}$ (индексы со штрихами нумеруют новые координаты)

Для линейных функций имеем, обращая матрицу C, $y'_{j'_l} = c^{j_l}_{j'_l} y_{j_l}$ (2)

$y^l_{j'_l} = c^{j_l}_{j'_l} y^l_{j_l}$, или,

Подставим выражения (1) и (2) в выражение

$$f(x_1,\dots,x_p;u^1,\dots,u^q) = T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} x_1^{i_1}\cdots x_p^{i_p}\, y^1_{j_1}\cdots y^q_{j_q} \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}$$

$$= \underbrace{\left(T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}\, c^{i_1}_{i'_1}\cdots c^{i_p}_{i'_p}\, d^{j'_1}_{j_1}\cdots d^{j'_q}_{j_q}\right)}_{=\;T^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}} x'^{i'_1}_1\cdots x'^{i'_p}_p\, y'^1_{j'_1}\cdots y'^q_{j'_q} \qquad (3)$$

$\Rightarrow$

Эта формула показывает, что матрица C участвует p раз, а $\mathcal{D} = C^{-1}$ – q раз, что согласуется с тем, что тензор p раз ковариантный и q раз контравариантный.

Отождествление тензоров малых валентностей с геометрическими объектами.

Теорема. 1) $T^1_0(V) = V^{**} \cong V$. (известный изоморфизм).

2) $T^0_1(V) = V^*$ (по определению).

3) $T^0_2(V)$ – билинейные функции.

4) $T^1_1(V) \cong L(V)$ – пространство линейных операторов на V.

Доказательство требуется только для T^1_1.

Пусть $f(v,u)$ – тензор типа $(1,1)$, $v \in V \cong V^{**}$, $u \in V^*$.

Напомним, что изоморфизм между V и V^{**} задается правилом $v \mapsto \varepsilon_v$, $\varepsilon_v(u) = u(v)$.

Обратное отображение обозначим так: $\forall l \in V^{**}$, $l \to y_l \in V$.

Заметим, что при фиксированном v ф-я $f(v,u)$ – линейная ф-я на V^*, $f(v,u) = \varepsilon_v(u) = u(y_v)$

($y_v \in V$, обозначение v для y введено, т.к. в данном случае вектору v соответствует вектор v)

Соответствие $v \xmapsto{\varphi} y_v$ является линейным оператором $\varphi: V \to V$. В самом деле,

$f(v_1+v_2,u) = f(v_1,u) + f(v_2,u) = u(y_{v_1}) + u(y_{v_2}) = u(y_{v_1}+y_{v_2}) \Rightarrow$

$\varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$.

Также можно проверить для λv.

Чтобы убедиться, что это изоморфизм, дост. проверить эпиморфизм (т.к. размерности $= n^2$)

если $\varphi: V \to V$ – линейный оператор, $f(v,u) := u(\varphi(v))$ – билинейная ф-я

$f: V \times V^* \to F$, ч.т.д.

§ 2. Свёртка. Симметризация и альтернирование

В качестве наводящих соображений рассмотрим примеры.

1. След матрицы линейного оператора

$A = (a^i_j)$ – матрица линейного оператора, в некотором базисе $A = (a^i_j)$ – тензора типа $(1,1)$, $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a^i_i = a^i_i$, по правилу Эйнштейна. Как известно, след не зависит от выбора базиса.

Это можно проверить в тензорных обозначениях:

$a'^{i'}_{j'} = d^{i'}_i a^i_j c^j_{j'}$, тогда $\operatorname{tr} A' = (\sum_{i'}) a'^{i'}_{i'} = d^{i'}_i a^i_i c^i_{i'} =$

$= \underbrace{d^{i'}_i c^i_{i'}}_{=1} a^i_i = a^i_i$. Это значит, что след – инвариант, т.е. тензор типа $(0,0)$.

2. Образ вектора x в матричном виде $Y = A \cdot X$.

$A = (a^i_j)$ (скобки можно не писать), $X = (x^k)$

Тензор $A \otimes X = a^i_j x^k$ имеет тип $(1,2)$.

Теперь $y^i = (A \cdot X)^i = a^i_j x^j$ – вектор, т.е. тензор типа $(0,1)$

3. Произведение матриц $A \cdot B$. $A = a^i_j$, $B = b^k_l$.

Сначала $A \otimes B = a^i_j b^k_l$ – тензор типа $(2,2)$, теперь

$C = A \cdot B = a^i_j b^j_l = c^i_l$ – матрица, т.е. тензор типа $(1,1)$

Общий случай: $f = f(v_1,\dots,v_p;u^1,\dots,u^q) \in T^q_p(V)$, $p,q \geq 1$.

Определение. Свёртка тензора f по r-му верхнему индексу и s-му нижнему индексу ($1 \le r \le q$, $1 \le s \le p$) – это

$$\bar{f}(v_1,\dots,\hat{v}_s,\dots,v_p;u^1,\dots,\hat{u}^r,\dots,u^q) := \left(\sum_{k=1}^{n}\right) f(v_1,\dots,\underset{s}{e_k},\dots,v_p;u^1,\dots,\underset{r}{e^k},\dots,u^q)$$

(e_k и e^k имеют одинаковые номера, знак суммы можно не писать)

(крышка над переменной – „шапка-невидимка" – означает, что $\hat{v}_s$ и $\hat{u}^r$ там нет). Используется также обозн. $\bar{f} = \operatorname{tr}^r_s(f)$

Утверждение. Отображение $f \longmapsto \bar{f}$ – линейное отображение $\operatorname{tr}^r_s: T^q_p(V) \to T^{q-1}_{p-1}(V)$, причём

$$\bar{T}^{j_1,\dots,\hat{j}_r,\dots,j_q}_{i_1,\dots,\hat{i}_s,\dots,i_p} = T^{j_1,\dots,k,\dots,j_q}_{i_1,\dots,k,\dots,i_p}$$

Док-во.

$\bar{f}(v_1,\dots,\hat{v}_r,\dots,v_p;u^1,\dots,\hat{u}^s,\dots,u^q) =$